NOETHERSCHE GRUPPEN MIT NILPOTENTEN NORMALTEILERN VON ENDLICHEM INDEX

VON
HERMANN SIMON

Die Frage der Bestimmung der Beschaffenheit einer abstrakten, gruppentheoretischen Eigenschaft E, so dass endlich erzeugte E-Gruppen endlich sind, ist in Simon [1] für die Klasse der endlich erzeugten Gruppen mit endlicher Hyperzentrumsfaktorgruppe behandelt worden. In der vorliegenden Arbeit soll nun das Problem für die Klasse der endlich erzeugten Gruppen G mit nilpotenten Normalteilern N endlicher Klasse von endlichem Index $[G:N]$ analog zu [1] gelöst werden.

Terminologie und Bezeichnungen sind wie in Simon [1].

DEFINITION 1. Eine Gruppe G heisst *fastpseudohomogen*, wenn es eine natürliche Zahl n und eine unendliche Primzahlmenge $\mathfrak{P}$ gibt, so dass für alle endlichen Faktorgruppen E von G gilt: Ist P ein p-Normalteiler von E (mit p aus $\mathfrak{P}$), so ist die Ordnung ϕ_p der von E in P induzierten Automorphismengruppe:

$$\phi_p = (n, \phi_p)p^\beta, \qquad \beta \geqq 0.$$

Anmerkung. Mann kann annehmen $p \nmid n$ für alle p aus $\mathfrak{P}$, da es ja nur endlich viele Primzahlen p mit $p \mid n$ gibt.

HILFSSATZ 1. *Die fastpseudohomogene Gruppe H ist noethersch, wenn sie einen torsionsfreien abelschen Normalteiler B mit unendlicher zyklischer Faktorgruppe $H/B = \{gB\}$ und $B = \{b^H\}$ für geeignetes b aus B besitzt.*

Beweis. (1) Da für $B = 1$ die Aussage trivial ist, sei von nun an $B \neq 1$. Aus $B = \{b^H\}$ und $H/B = \{gB\}$ folgt $H = \{b, g\}$ und $B = \{\cdots, b^{g^i}, \cdots\}$ mit $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Die Fastpseudohomogenität von H ergibt nach Simon [1; Lemma 1.1] die Unmöglichkeit der Unabhängigkeit der b^{g^i}, *also hat B endlichen Rang.*

(2) Sei $\mathfrak{P}$ die in der Fastpseudohomogenität von H geforderte, unendliche Primzahlmenge und $p \nmid n$ für alle p aus $\mathfrak{P}$ (s. Anmerkung zu Definition 1). Man bilde für p aus $\mathfrak{P}$: $B^p \leqq B \lhd \neq H$. Als charakteristische Untergruppe von B is B^p Normalteiler von H. Die Endlichkeit des Ranges von B zieht die Endlichkeit von B/B^p nach sich. Aus $H/B^p \rhd B/B^p$ und der Zyklizität von $(H/B^p)/(B/B^p) \cong H/B$ folgt das Noetherschsein von H/B^p.

Die Kommutativität von B und H/B implizieren die Auflösbarkeit von H. In der auflösbaren, noetherschen Gruppe H/B^p existiert nach Hirsch [1] ein torsionsfreier Normalteiler T/B^p mit endlichem Index $[H:T]$. In unendlichen homomorphen Bildern von H/B^p existieren also von 1 verschiedene, torsions-

Received September 2, 1962.