

REPRESENTATION DES MESURES DE PROBABILITE SUR LE PRODUIT DE DEUX ESPACES DENOMBRABLES, DE MARGES DONNEES

PAR
GÉRARD LETAC

Introduction

X et Y étant deux ensembles finis ou dénombrables, munis de la topologie discrète, soient r et s des mesures de probabilité sur X et Y , c'est-à-dire des mesures de Radon positives de masse 1. On se propose ici de représenter l'ensemble $\mathcal{M}(r, s)$ des mesures p de probabilité sur le produit cartésien $Z = X \times Y$ dont les projections sur X et Y sont r et s , c'est-à-dire sont telles que

$$\sum_{y \in Y} p(x, y) = r(x), \quad \sum_{x \in X} p(x, y) = s(y).$$

Par exemple on sait [1] que les matrices bistochastiques sont barycentres des matrices de permutation. Plus généralement, ici, $\mathcal{M}(r, s)$ ayant une structure d'ensemble convexe, compact, métrisable, lorsqu'il est muni de la topologie faible des mesures, le Théorème de Choquet [3] permet de représenter $\mathcal{M}(r, s)$ comme l'ensemble des barycentres des extrémales de $\mathcal{M}(r, s)$ (théorème 1).

Nous porterons notre attention essentiellement sur ces extrémales, dont une caractérisation abstraite a été donnée dans [4]. Appelons ensemble d'unicité toute partie non vide de Z qui ne puisse porter deux mesures de probabilité différentes et de mêmes marges. $x(z)$ et $y(z)$ étant les projections de $z \in Z$ sur X et Y , E étant une partie de Z , appelons arc dans E une suite $z_1, \dots, z_n$ de points de E telle que l'on ait:

$$x(z_{2k}) = x(z_{2k-1}) \quad \text{et} \quad y(z_{2k+1}) = y(z_{2k}) \quad \text{pour tout } k$$

ou bien

$$y(z_{2k}) = y(z_{2k-1}) \quad \text{et} \quad x(z_{2k+1}) = x(z_{2k}) \quad \text{pour tout } k,$$

z_1 et z_n étant les extrémités de l'arc. Le théorème 3, fondamental, montre que E est ensemble d'unicité si et seulement si il ne contient pas d'arc fermé (c'est-à-dire à extrémités confondues) non trivial. Le théorème 4 caractérise alors les extrémales de $\mathcal{M}(r, s)$: p est extrémale si et seulement si le support $S(p)$ est ensemble d'unicité.

Après avoir montré que la famille des ensembles d'unicité est inductive, il est naturel de s'intéresser à ses éléments maximaux. Le théorème 6 montre que ceux-ci sont connexes par arc; le théorème 7 donne une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'un ensemble d'unicité maximal porte une extrémale de $\mathcal{M}(r, s)$.

L'étude des extrémales est faite par un formalisme emprunté à la théorie des graphes, décrit dans le paragraphe 2.

Received May 11, 1965.