KOMPAKTE PROJEKTIVE EBENEN[1]

VON HANS FREUDENTHAL

Die bekannte Lücke in der von Staudtschen Begründung der projektiven Geometrie wurde anfangs ausgefüllt durch die Einführung von Ordnungs- und Stetigkeitsaxiomen[2]. Später ging man dazu über, nichttriviale Inzidenzsätze axiomatisch zu fordern und auf Ordnungs- und Stetigkeitsaxiome mehr oder weniger zu verzichten[3]; will man sich den Weg zur komplexen Geometrie nicht abschneiden, so sind Ordnungs-Axiome sicher unzweckmässig. Ein Mittelweg ist es, als nicht-triviales ebenes Inzidenzaxiom jedenfalls "Desargues" zu Grunde zu legen und dann ein Stetigkeitsaxiom in der Form von Kompaktheits- und Zusammenhangsforderungen hinzuzufügen; man kommt mit "Desargues" zu einer Geometrie über einem Schiefkörper, der aus topologischen Gründen nur der der reellen oder komplexen Zahlen oder der Quaternionen sein kann[4].

Es fragt sich nun, wie weit man ohne "Desargues", aber mit topologischen Forderungen kommen kann. Es scheint erst, dass sich nichts Interessantes ergibt. Man kennt ja nicht-Desarguessche Ebenen (von der Art der Hilbertschen[5]), die topologisch mit der gewöhnlichen projektiven Ebene übereinstimmen.

Wir wollen nun doch topologische projektive Ebenen betrachten, die als topologische Räume Kontinua sind (man braucht statt des Zusammenhangs übrigens nur, dass sie positiv-dimensional sind). Wir zeigen dann, dass die Gerade in solch einer Ebene notwendig im Kleinen zusammenhängend ist, ja sogar im Kleinen zusammenziehbar, und noch mehr: Jede echte abgeschlossene Teilmenge der Geraden lässt sich auf der Geraden auf einen Punkt zusammenziehen, und als Zusammenziehung kann man eine Schar von (bis auf den Schluss) homöomorphen Abbildungen wählen.

Einer Vermutung von Poincaré zufolge würden die Sphären unter den Mannigfaltigkeiten charakterisiert sein durch die Eigenschaft: Jede echte abgeschlossene Teilmenge lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen. Es liegt nahe, zu vermuten, dass die Geraden der topologischen projektiven Ebenen notwendigerweise Sphären sind. Nun weiss man noch nicht einmal, ob die genannten Geraden den Mannigfaltigkeits-Charakter besitzen. Doch

Received August 13, 1956.

[1] Das Ergebnis wurde auf dem Internationalen Mathematikerkongress, Amsterdam 1954, mitgeteilt.

[2] Das Resultat dieser recht langen Entwicklung findet man in lehrbuchartiger Form bei F. ENRIQUES, *Vorlesungen über projektive Geometrie*, Leipzig, 1903.

[3] Das fängt an bei H. WIENER, Jber. Deutschen Math. Verein., 1 (1893), 45–48.

[4] A. N. KOLMOGOROFF, Ann. of Math., 33 (1932), 163–174. Was hinzukommt, wenn man die Bedingung des Zusammenhangs fallen lässt, hat N. JACOBSON vollständig untersucht in Amer. J. Math., 58 (1936), 433–449.

[5] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Kap. V.