DIFFRACTION POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

T. HARGÉ

I. Introduction. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ euclidien à bord C^∞ . On note $\vec{n}$ la normale orientée vers l'intérieur de Ω . Soient y_0 et x_0 deux points de Ω . Soit d la fonction distance de la variété à bord $\bar{\Omega}$. Soit $d_0 = d(y_0, x_0)$. On suppose que:

H.1. Il existe une unique géodésique minimisante γ_0 reliant y_0 et x_0 .

H.2. Il existe $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ éléments de $]0, d_0[$, $\bar{s}_1 < \bar{s}_2$, tels que $\gamma_0|_{]0, \bar{s}_1[\cup]\bar{s}_2, d_0[} \in \Omega$, $\gamma_0|_{[\bar{s}_1, \bar{s}_2]} \in \partial\Omega$ (γ_0 est paramétrée par longueur d'arc).

Pour $s \in [\bar{s}_1, \bar{s}_2]$, $d^2\gamma_0/ds^2 = -(1/\rho(s))\vec{n}_{\gamma_0(s)}$, avec $\rho(s) > 0$ (rayon de courbure géodésique).

H.3. y_0 et x_0 ne sont pas conjugués: tout champ de Jacobi défini le long de γ_0 , nul en y_0 et x_0 est identiquement nul.

La définition d'un champ de Jacobi est donnée dans IV.

Soit $p_t(x, y)$ le noyau de la chaleur sur Ω avec condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$:

$$(P) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) p_t = 0 \\ p_t|_{\partial\Omega_x} = 0 \\ p_{t=0} = \delta_{x=y}. \end{cases}$$

THÉORÈME 1.1. Soit $-w_0$ le premier zéro de la fonction d'Airy. Il existe $t_0 > 0$, $C \in \mathbb{R}$, tels que

$$t \in]0, t_0[\Rightarrow p_t(x_0, y_0) \leq \exp \left[-\frac{d_0^2}{4t} - w_0 \frac{d_0^{1/3}}{(4t)^{1/3}} \int_{\gamma_0 \cap \partial\Omega} \frac{ds}{\rho(s)^{2/3}} + C \log t \right].$$

Le problème de la diffraction par un obstacle a été étudié par de nombreux auteurs, le cadre géométrique le plus usuel étant celui où Ω est le complémentaire d'un convexe de $\mathbb{R}^n$.

Le comportement en temps petit du noyau de la chaleur pour une condition limite de Neumann a été étudié de manière heuristique par Buslaev (cf. [Bu]) puis à l'aide de méthodes probabilistes.

Ainsi, Ikeda et Kusuoka (cf. [IK]) prouvent l'estimation suivante pour des points x_0, y_0 de Ω , sous une hypothèse de non dégénérescence du hessien de la fonctionnelle

Reçu le 28 décembre 1992. Révision reçue le 28 juin 1993.