

SINGULARITES DE CHAMPS ISOCHORES

JEAN-PIERRE FRANCOISE

Un théorème de C. L. Siegel [1] [2] assure la divergence générique de la forme normale de Birkhoff d'un champ hamiltonien analytique au voisinage d'un de ces zéros.

Dans ce travail, on aborde en parallèle l'étude des champs qui conservent une forme de volume.

On peut penser commencer, en comparaison avec le cas symplectique par une étude d'invariants géométriques, établir l'existence d'orbites périodiques ou de sous-variétés stables, mais il apparaît vite que le problème est de toute autre nature et que les arguments utilisés empruntent essentiellement à la géométrie analytique locale.

Après avoir explicité la situation en formel et dégagé l'hypothèse générique de régularité du jet d'ordre un, on remarque que la convergence de la forme normale exige l'existence d'une intégrale première analytique. La question de cette convergence n'est donc posée que pour les seuls champs isochores qui possèdent au moins une intégrale convergente. C'est pourquoi on n'envisage que ceux-ci et on commence par en donner une caractérisation simple, ce sont ceux qui s'écrivent:

$$X = \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x) E_j \quad \text{où } E_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_{j+1}}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

dans un système de coordonnées $x = (x_1, \dots, x_n)$ pour lequel la forme invariante est $dx = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Puis on en vient pour les champs considérés à établir la convergence des fonctions caractéristiques qui composent la forme normale et de ce que j'appelle l'intégrale caractéristique, produit des coordonnées normalisantes.

La méthode utilisée pour cela est analogue à celle de [3] où il est envisagé le problème de la classification des germes à singularité isolée sous le sous-groupe des difféomorphismes isochores.

La question de la recherche d'un difféomorphisme normalisant convergent se pose alors en des termes suffisamment agréables pour permettre la construction de contre-exemples inspirés de Brjuno [4].

Deux raisons bien distinctes à la divergence apparaissent, d'une part les petits diviseurs et d'autre part la présence des termes nilpotents dans la forme normale. Quant à l'influence de ces termes nilpotents dont l'étude est peu dégagée du reste