# EINE ASYMPTOTISCHE FUNKTIONALGLEICHUNG FÜR EINE VERALLGEMEINERTE HALBGITTER-FUNKTION.

HANS-JÜRGEN GLAESKE

Die Untersuchung des Verhaltens der Halbgitterfunktion

$$H(\omega; s; \alpha, \beta) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} [g + \beta + \omega(h + \alpha)]^{-s} \tag{1}$$

$$\operatorname{Im}\omega > 0, \quad \sigma > 2, \quad 0 \leq \alpha, \quad \beta \leq 1, \quad \alpha + \beta(1 - \beta) \neq 0 \tag{2}$$

unter der Modultransformation $\omega' = -\omega^{-1}$ führte in [2] zu einer *asymptotischen Funktionalgleichung*, die als Grenz- und Spezialfälle eine Reihe wichtiger Formeln, etwa für die Modulfunktion $\eta(\tau)$, die Thetafunktion $\vartheta_1(v/\omega)$, sowie von Beziehungen deren Herleitung mit den Namen Wigert, Guinand und Iseki verbunden sind und die verschiedenste Anwendungen in der analytischen Zahlentheorie fanden. In Hinblick auf nichtlineare Zerfällungsprobleme, wie sie etwa in [4] behandelt werden, sind die Ergebnisse jedoch zu speziell. In Verallgemeinerung von (1) betrachten wir deshalb für natürliche Zahlen $\lambda$ und unter den Bedingungen (2) die Funktion

$$H^{(\lambda)}(\omega; s; \alpha, \beta) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} [g + \beta + \omega(h + \alpha)^{\lambda}]^{-s} \tag{1'}$$

Für $\lambda = 1$ erhält man die Halbgitterfunktion (1). Wie in [2] kann man mittels Mellinscher Integrale für $H^{(\lambda)}$ eine Integraldarstellung angeben, die durch Wegverlagerung eine analytische Fortsetzung von (1′) bezüglich $s$ gestattet. Man erhält nach kurzer Rechnung

$$H^{(\lambda)} = -\frac{(-2\pi i)^{s-1}}{\Gamma(s)} \int_{(|s|+2)} du(-2\pi i\omega)^{-u}\Gamma(u)\zeta(\lambda u, \alpha) \cdot l_{1+u-s}(e^{2\pi i\beta}) \tag{3}$$

$$\operatorname{Im}\omega > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

und

$$H^{(\lambda)}(\omega; s; 0, \beta) = -\frac{(-2\pi i)^{s-1}}{\Gamma(s)} \int_{(|s|+2)} du(-2\pi i\omega)^{-u}\Gamma(u)\zeta(\lambda u) \cdot l_{1+u-s}(e^{2\pi i\beta}) + \frac{(-2\pi i)^{s}}{\Gamma(s)} l_{1-s}(e^{2\pi i\beta}) \quad \operatorname{Im}\omega > 0, \quad 0 \leq \beta \leq 1 \tag{3'}$$

Hierbei sei für $\sigma > 1$

$$l_s(e^{2\pi i a}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n a}}{n^s}, \qquad a = \bar{a} \tag{4}$$

erklärt.

Received July 9, 1965.