ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 40, Number 1, Spring 1996

APPLICATIONS HARMONIQUES FEUILLETÉES

AZIZ EL KACIMI ALAOUI AND EDUARDO GALLEGO GÓMEZ[1]

1. Introduction

Le but de cette note est l'étude des applications harmoniques entre varietés feuilletées (voir 2). Pour que la notion d'harmonicité ait un sens il nous faudra considérer des feuilletages riemanniens. On commence donc par rappeler la définition et la structure de ce type de feuilletages.

Soient $\chi(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M et $\Gamma(\mathcal{F})$ la sous-algèbre de Lie de $\chi(M)$ formée des champs tangents à $\mathcal{F}$. On dira qu'un champ $Y \in \chi(M)$ est *feuilleté* si pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{F})$, le crochet $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{F})$. On notera $\chi(M, \mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des champs feuilletés; $\Gamma(\mathcal{F})$ en est un idéal. Le quotient $\chi(M/\mathcal{F}) = \chi(M, \mathcal{F})/\Gamma(\mathcal{F})$ est appelé *algèbre des champs basiques* de $\mathcal{F}$; c'est un A_b-module où A_b est l'algèbre des *fonctions basiques* i.e constantes sur les feuilles de $\mathcal{F}$. On dira que $\mathcal{F}$ est *transversalement parallélisable* si $\chi(M/\mathcal{F})$ est libre de rang égal à $\text{cod}(\mathcal{F}) = n$. Ceci signifie qu'il existe sur M n champs feuilletés $Y_1, \ldots Y_n$, transverses à $\mathcal{F}$ et linéairement indépendants en chaque point; on dira que $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est un *parallélisme transverse.* Dans ces conditions, le fibré normal $\nu\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ supporte une métrique riemannienne invariante le long des feuilles: il suffit de la définir sur la fibre en un point et la transporter dans toute la variété par le parallélisme transverse. De manière générale, $\mathcal{F}$ est dit *riemannien* s'il existe une métrique riemannienne h sur M telle que $\mathcal{L}_X \gamma = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$ où γ désigne la métrique induite par h sur $\nu\mathcal{F}$; on dira que la métrique h est *bundle-like* ou *quasi-fibrée.*

La structure d'un tel feuilletage est décrite par le théorème qui suit.

Théorème (Molino [M]). Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage riemannien complet (i.e., $\mathcal{F}$ admet métrique bundle-like complète) transversalement orientable, de codimension q et p: $M^\# \longrightarrow M$ le $SO(q)$-fibré principal des repères othonormés directs transverses à $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F}$ se relève en un feuilletage transversalement parallélisable $\mathcal{F}^\#$ sur $M^\#$ tel que:

(i) $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{F}^\#$,

Received February 2, 1994.
1991 Mathematics Subject Classification. Primary 58E20, Secondary 53C12.
[1]Pendant l'élaboration de ce travail, le second auteur a profité de l'hospitalité de l'URA au CNRS 751 GAT à L'Université de Lille I. Il remercie tous ses membres pour l'accueil chaleureux qu'ils lui ont réservé. Ce travail a été partiellement financé par la DGYCIT, proyecto PB90-686.