Vol. 95, No. 2 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © 1998

UNE SUITE EXACTE EN L^2-COHOMOLOGIE

GILLES CARRON

0. Introduction. Le but de cet article est d'étudier certains liens entre la cohomologie L^2 (réduite) et la cohomologie à support compact.

Rappelons que si (M^n, g) est une variété Riemannienne complète son k-ième espace de L^2-cohomologie (réduite) peut être défini comme l'espace, $\mathscr{H}^k(M)$, des k-formes différentielles $\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ qui sont fermées et cofermées ($d\alpha = 0$, $\delta\alpha = 0$) ou de façon équivalente, qui sont harmoniques pour le Laplacien de Hodge-de Rham $\Delta^k = \delta d + d\delta$ (cf. la section 1.1 de cet article ou [Do]). Lorsque la variété M est compacte (sans bord), le théorème de Hodge-de Rham dit que ces espaces sont de dimension finie et qu'ils sont isomorphes aux espaces de cohomologie réelle de M. Nous avons la formule de Gauss-Bonnet

$$\chi(M) = \int_M \Omega = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim \mathscr{H}^k(M),$$

où Ω est n-forme d'Euler. Par exemple, en dimension 2, nous avons $\Omega = K dA/2\pi$, où K étant la courbure de Gauss de (M, g) et dA la forme d'aire.

Lorsque (M, g) n'est pas compacte, ces espaces ne sont pas, en général, de dimension finie. Cependant nous avions, dans [C], obtenu le résultat suivant.

Théorème 0.1. *Si (M^n, g) est une variété Riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M) \left(\int_M |u|^{(2p/p-2)}(x)\, dx \right)^{1-(2/p)} \leqslant \int_M |du|^2(x)\, dx, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et dont le tenseur de courbure vérifie

$$\int_M |R|^{p/2}(x)\, dx < \infty,$$

alors les espaces de L^2-cohomologie de (M^n, g) sont de dimension finie.

Remarquons alors que la n-forme d'Euler vérifie la majoration

$$|\Omega|(x) \leqslant c(n) |R|^{n/2}(x).$$

Reçu le 4 mars 1996. Révision reçu le 2 juin 1997.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 58G05, 46E35, 53C21, 53C42.