Vol. 95, No. 2 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © 1998

MINORATIONS DE SOMMES D'EXPONENTIELLES

PHILIPPE MICHEL

1. Introduction. Soit $f(X) \in \mathbf{Q}(X)$ une fraction rationnelle, on la suppose normalisée de sorte que $f = P/Q$, P et Q des polynômes premiers entre eux, dont les coefficients sont entiers et premiers entre eux. On considère la famille de sommes d'exponentielles S_f définie par (en notant $\mathrm{e}_n(.) = \exp(2i\pi./n)$)

$$S_f(m;n) := \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ (Q(x),n)=1}} \mathrm{e}_n(mP(x)\overline{Q(x)}) := \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ (Q(x),n)=1}} \mathrm{e}_n(mf(x)) \quad (m,n) = 1.$$

Comme de coutume $\bar{m} \pmod n$ est l'inverse de m modulo n ($m\bar{m} = 1 \pmod n$). Comme on le sait, de nombreux problèmes de théorie des nombre nécessitent de savoir majorer non trivialement la somme $S_f(m;n)$. Pour ce faire, un dévissage facile nous ramène au cas crucial où $n = p$ est un nombre premier. Depuis Weil et la démontration de l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur les corps finis, on sait que pour p assez grand, on a la majoration

$$|S_f(m;p)| \leqslant k_f p^{1/2},$$

avec $k_f = \max(\deg P, \deg Q) + \#\{\text{racines distinctes de } Q\} - 1$ (voir [D2]). La question de savoir si cette majoration est optimale quand l'un des deux paramètres m ou p varie est donc très naturelle. Le cas où p est fixé et où m décrit $\mathbf{F}_p^*$ est assez bien compris depuis les travaux de Deligne et de Katz. (Voir [Ka3] pour une discussion très claire à ce propos.) En effet, pour les fractions f décrites ci-dessous, on peut donner une mesure explicite μ_f sur $[-1,1]$ telle que quand $p \to +\infty$ la famille des sommes normalisées $\{S_f(m;p)/k_f p^{1/2}\}_{m=1,\dots,p-1}$ devient équidistribuée relativement à μ_f. En revanche, quand m est fixé (disons $m = 1$), peu de choses sont connues sur la distribution des sommes $\{S_f(1;p)/k_f p^{1/2}\}_p$ quand p décrit l'ensemble des nombres premiers. On s'attend cependant à ce que les sommes soient également équidistribuées relativement à μ_f. Citons deux cas connus d'équirépartition. Celui du monôme $f(x) = x^3$, Heath-Brown et Patterson [HBP] ont montré que pour p décrivant l'ensemble des nombres premiers $= 1 \bmod 3$, les angles θ_p définis par $\cos\theta_p = S_{X^3}(1;p)/2p^{1/2}$ sont équirépartis relativement à la mesure uniforme sur $[-\pi,\pi]$. Plus récemment la preuve par Duke, Friedlander et Iwaniec [DFI] que les rationnels $\{\pm v/p\}_{p\in\mathcal{P}}$ définis modulo 1 par l'équation $v^2 + 1 = 0 \pmod p$ sont équirépartis modulo 1. Observons que la preuve de ces deux théorèmes nécessite d'employer la pleine force de la

Reçu le 21 octobre 1996.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 11L05, 11L07, 11L20, 11N36.