Vol. 73, No. 3 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © March 1994

TEMPS DE VIE ET COMPORTEMENT EXPLOSIF DES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS D'ONDES QUASI-LINÉAIRES EN DIMENSION DEUX, II

SERGE ALINHAC

Introduction. Dans ce travail, nous considérons des équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux d'espace.

Nous supposons les données de Cauchy C_0^∞ et de taille ε, et étudions le temps de vie T_ε et le comportement de la solution u du problème.

1. Ce travail, comme l'indique son titre, fait suite à [2], et en précise les résultats. Nous ne reviendrons pas ici sur les indications bibliographiques données dans [2], mais soulignerons plutôt les éléments nouveaux.

Nous prouvons ici, génériquement (théorème 1.1), l'existence d'une fonction T_ε^a, qu'on peut appeler "temps de vie asymptotique", car elle possède les deux propriétés suivantes:

(i) $\forall N \in \mathbb{N}$, $T_\varepsilon \geqslant T_\varepsilon^a - \varepsilon^N$ pour $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_N$.

(ii) Il existe $C > 0$ telle que, pour $t \leqslant T_\varepsilon^a - \varepsilon^N$,

$$\frac{1}{C}\frac{1}{T_\varepsilon^a - t} \leqslant \|\nabla^2 u\|_{L^\infty} \leqslant C\frac{1}{T_\varepsilon^a - t}.$$

Cette fonction T_ε^a est calculable à un ordre arbitraire près en ε.

La contribution de [2] consistait à calculer les deux premiers termes $A_0^2/\varepsilon^2 + 2(A_0 A_1/\varepsilon)$ de T_ε^a, et à établir une version faible de (i) et (ii), suffisante toutefois pour montrer une dégradation effective de $\|\nabla^2 u\|_{L^\infty}$ en grand temps. Soulignons que nous ne prouvons pas ici l'explosion effective de la solution, mais seulement un résultat de nature asymptotique.

Néanmoins, sans savoir le démontrer, nous croyons vrai l'énoncé suivant.

Dans le cas $g(\omega) \not\equiv 0$, pour des données génériques, $T_\varepsilon < +\infty$ et $T_\varepsilon - T_\varepsilon^a = O(\varepsilon^\infty)$; de plus, pour $t < T_\varepsilon$,

$$\frac{1}{C}\frac{1}{T_\varepsilon - t} \leqslant \|\nabla^2 u\|_{L^\infty} \leqslant C\frac{1}{T_\varepsilon - t}.$$

2. La méthode de la preuve est classique dans son principe, qui tient en deux points:

Reçu le 26 avril 1993.