Vol. 68, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © October 1992

# CONTRÔLE ANALYTIQUE I: ESTIMATIONS A PRIORI

GILLES LEBEAU

**1. Introduction et énoncé du résultat.** Dans cet article on s'intéresse au problème de contrôle des solutions de l'équation des ondes sur une variété riemanienne compacte à bord, $M$. Dans [BLR], C. Bardos, G. Lebeau, et J. Rauch ont prouvé, sous une hypothèse géométrique reliant le flot géodésique de $M$ et les données géométriques de contrôle $\Gamma$ (partie de $\partial M$ supportant les fonctions de contrôle) et $T$ (temps d'action du contrôle), que tout état était exactement contrôlable. D'autre part, J-L. Lions a remarqué qu'une hypothèse d'unicité entraîne la densité de l'espace $F$ des états contrôlables dans l'espace d'énergie.

Dans cet article, nous donnons des estimations a priori (inférieures et supérieures) sur la petitesse de $F$ dans le cas général où l'hypothèse de [BLR] n'est plus nécessairement satisfaite, tout en conservant l'hypothèse d'unicité. Pour cela, nous comparons les espaces de vecteurs analytiques avec les espaces d'interpolation entre $F$ et l'espace d'énergie (voir théorème 2). Comme corollaire, nous obtenons en particulier que les fonctions de coût du contrôle approximatif sur les fonctions propres de fréquence inférieure à $\mu$ sont toujours au plus exponentielles en $\mu$, et le sont effectivement dès qu'une trajectoire de billard est non contrôlée (voir §2 (23) à (28)).

Pour obtenir ces estimations, nous supposons $M$ analytique. (Dans le cas $C^\infty$, la méthode que nous utilisons ne donne que des estimations inférieures polynomiales, donc non pertinentes.)

Nous obtenons les estimations inférieures par une construction d'optique géométrique (§2). Les estimations supérieures (§§3, 4, et 5), plus techniques à démontrer, s'obtiennent en rendant plus qualitatif le théorème d'Holmgren entraînant l'unicité, l'idée étant d'utiliser conjointement le théorème de Cauchy-Kowalewski précisé par Leray, l'argument de déformation et des arguments d'interpolation entre l'espace d'énergie et des espaces de fonctionnelles analytiques convenables. Ce sont les arguments d'interpolation qui permettent de globaliser à toute la déformation les estimations locales fournies par le théorème de Cauchy-Kowalewski.

Avant d'énoncer notre résultat principal (théorème 2) précisons les notations et faisons quelques rappels.

Soit $(M, g)$ une variété riemanienne compacte, analytique à bord analytique $\partial M$, $\Delta$ l'opérateur de Laplace sur $M$ et $\square = \partial_t^2 - \Delta$ l'opérateur des ondes sur le cylindre $X = \mathbb{R}_t \times M$.

Received 25 November 1991. Revision received 20 April 1992.