Vol. 49, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © March 1982

UNICITE ET NON UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS A CARACTERISTIQUES DOUBLES

R. LASCAR ET C. ZUILY

§0. Introduction. Soit Ω un ouvert de R^{n+1}. En convenant de noter (x, y), $x \in \mathsf{R}^n$, $y \in \mathsf{R}$, le point courant de Ω, nous considérons des opérateurs différentiels de la forme:

$$P(x, y; D_x, D_y) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} a_\alpha(x, y) D_x^\alpha + c(x, y) D_y$$

où les a_α, $|\alpha| \leqslant 2$ et c sont dans $C^\infty(\Omega)$.

Désignons par $p(x, y; \xi)$ le symbole principal de P et par (x_0, y_0) un point fixé de Ω. Nous ferons les hypothèses suivantes:

(i) $p(x, y; \xi)$ et $c(x, y)$ sont à valeurs réelles.

(ii) $c(x_0, y_0) \neq 0$.

Ce travail est divisé en deux parties. La première est consacrée à la preuve d'un résultat d'unicité locale, au voisinage de (x_0, y_0), des solutions du problème de Cauchy pour P, relatif à certaines hypersurfaces orientées et non caractéristiques passant par (x_0, y_0) (Th. 1.3). Ces hypersurfaces devront vérifier une condition que nous appellerons (par abus) de "pseudo-convexité par rapport aux bicaractéristiques de P". Ce résultat d'unicité est à rapprocher de ceux de Hörmander [6] chapitre VIII; sa preuve utilise une technique d'inégalités de Carleman avec des fonctions poids analogue à celles utilisées dans [2], [3]. Lorsque cette condition de pseudo-convexité est violée (en un sens légèrement fort) nous montrons qu'il suffit que P soit perturbé par un terme d'ordre zéro de classe C^∞, pour qu'il perde la propriété d'unicité locale (Th. 1.4). La preuve de ce résultat est inspirée des travaux de Cohen [5], Pliš [12], [13], Hörmander [7], Alinhac–Zuily [2]. On construit la fonction u, d'où l'on déduit la perturbation $a = -Pu/u$, comme superposition de fonctions u_k obtenues par une variante délicate de la méthode de l'optique géométrique.

Nous faisons ensuite remarquer sur des exemples, (Th. 1.6), qu'il n'y a pas non plus d'unicité lorsqu'il n'y a pas du tout de pseudo-convexité, résultat qui est à rapprocher de ceux de [1].

En ce qui concerne la structure des opérateurs P étudiés ici, nous faisons remarquer que l'ensemble des racines caractéristiques du symbole principal p (au

Received July 10, 1981.