Vol. 45, No. 2 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL© June 1978

SOLUTION EXPLICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR DES OPERATEURS EFFECTIVEMENT HYPERBOLIQUES

SERGE ALINHAC

I. Introduction.

Ce travail étend les résultats obtenus en [*1*] et [*2*] à un modèle assez général d'opérateurs effectivement hyperboliques (selon la terminologie de Hörmander [*7*]).

Il est consacré à l'écriture explicite de la solution, modulo C^∞, du problème de Cauchy pour l'opérateur

$$P = \partial_t^2 - t^2\partial_x^2 - \partial_y^2 + \wedge(t, x, y, D_x, D_y),$$

près du point ($\tau = t = \eta = 0$, $\xi \neq 0$) ($\wedge$ désigne ici un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1).

Outre le facteur "effectivement hyperbolique" $\tau^2 - t^2\xi^2$, le symbole principal p_2 de P contient un (ou plusieurs) facteur "nilpotent" η^2; le cas (général) où sont également présents des facteurs "d'Hermite" (i.e. "définis positifs") $z^2\xi^2 + \zeta^2$ (ζ variable duale de z) est abordé au paragraphe IV, dans lequel on précise la régularité (microlocale) des solutions. Toutefois, l'étude complète des singularités des solutions et de leur propagation n'est faite que dans le cas d'opérateurs tels que P, et résulte de la construction explicite d'une paramétrix du problème de Cauchy pour P, effectuée au paragraphe III). Les résultats de cette étude sont présentés au paragraphe II.

Un des traits nouveaux qui apparaissent ici est la non-régularité des caractéristiques de P; en conséquence, et contrairement à ce qui se produisait pour des opérateurs tels que $\partial_t^2 - t^2\partial_x^2 + \cdots$, ou $\partial_t^2 - x^2\partial_x^2 + \cdots$, il n'est plus possible de séparer a priori les singularités relatives à chacun des facteurs de la partie principale de l'opérateur.

Le théorème 1 montre, entre autres, que cette séparation s'effectue différemment suivant la proximité de $\eta = 0$ des singularités des données de Cauchy: en dehors d'une zone "parabolique" $|\eta|\xi^{-1/2} \leq$ cte, les singularités sont propagées suivant les bicaractéristiques des facteurs $\tau \pm \sqrt{t^2\xi^2 + \eta^2}$, tandis que dans cette zone, elles suivent celles des facteurs $\tau \pm t\xi$.

En s'inspirant des travaux de L. Boutet de Monvel [*3*] et ses élèves sur l'hypoellipticité des opérateurs à caractéristiques doubles, on a précisé, par un calcul direct, les classes de symboles intervenant dans l'expression des solutions sous forme intégrale de Fourier.

Received December 2, 1977.