LA LOI DE JORDAN-HÖLDER DANS LES HYPERGROUPES ET LES SUITES GÉNÉRATRICES DES CORPS DE NOMBRES $\mathfrak{P}$-ADIQUES

PAR MARC KRASNER

M. Kuntzmann[1] et MM. Ore et Dresher[2] ont montré que, pour les sous-hypergroupes reversibles d'un hypergroupe, a lieu une loi de Jordan-Hölder avec des hypothèses calquées sur celles de la loi de Jordan-Hölder pour les groupes sous sa forme classique. Cette forme de la loi de Jordan-Hölder a l'inconvénient de ne donner dans un cas particulier (celui des hypergroupes de classes), important pour la théorie des corps, que ce que donne déjà la loi de Jordan-Hölder dans les groupes: en effet, si G est un groupe, et si $\bar{G}$ et $g \subset \bar{G}$ sont deux sous-groupes de G, l'hypergroupe quotient droit $\bar{H}$ de $\bar{G}$ par g est invariant dans l'hypergroupe quotient droit H de G par g si, et seulement si, $\bar{G}$ l'est dans G, et l'hypergroupe quotient droit de H par $\bar{H}$ est isomorphe à celui de G par $\bar{G}$.

Je montre dans le travail qui suit que le théorème de Jordan-Hölder a lieu pour les sous-hypergroupes reversibles d'un hypergroupe, sous des hypothèses qui, tout en étant équivalentes aux hypothèses ordinaires dans le cas où l'hypergroupe dont il s'agit est un groupe, sont beaucoup plus faibles que ces dernières dans le cas général.

Il est à remarquer qu'il s'agit dans le présent travail de la forme *stricte* de la loi Jordan-Hölder, et non des analogues, pour les hypergroupes, des formes affaiblies de cette loi,[3] qui ont lieu quand on remplace la condition de l'invariance par celle de la permutabilité ou de la quasi-invariance, etc. La recherche de conditions aussi faibles que possible pour que ces analogues aient lieu semble être un problème intéressant et sans trop grandes difficultés.[4]

Il se trouve que si H et $\bar{H} \subset H$ sont deux sous-hypergroupes de l'hypergroupe de ramification $V_{K/k}$ d'un corps K/k de nombres $\mathfrak{P}$-adiques,[5] et s'il n'existe aucun hypergroupe $\bar{\bar{H}}$ entre $\bar{H}$ et H, $\bar{H}$ possède dans H la propriété qui remplace l'invariance dans la loi de Jordan-Hölder sous ma forme (par contre, $\bar{H}$ n'est invariant dans H que dans des cas exceptionnels). Ce résultat, qui est, en quelque sorte, l'analogue d'un théorème connu de Sylow pour les p-groupes, permet de démontrer un théorème très précis sur la structure des corps $\mathfrak{P}$-

Received July 31, 1939.

[1] *Opérations multiformes. Hypergroupes*, Comptes Rendus, Paris, vol. 204(1937), pp. 1787–1788.

[2] *Theory of multigroups*, American Journal of Mathematics, vol. 60(1938), pp. 705–733.

[3] Voir O. Ore, *On the theorem of Jordan-Hölder*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 41(1937), pp. 266–275, et O. Ore, *Structures and group theory*, I, ce Journal, vol. 3(1937), pp. 149–174.

[4] Certains résultats de M. Marty (*Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle*, Annales de l'Ecole Norm. Sup., vol. 53(1936), pp. 83–123; voir les pp. 96–99) peuvent être regardés comme un essai en ce sens.

[5] Voir la définition de cet hypergroupe dans Krasner, *Sur la primitivité des corps $\mathfrak{P}$-adiques* (Mathematica, vol. 13(1937), pp. 72–191), pp. 83–84.