NOTICE SUR LES TRAVAUX

DE

S. PINCHERLE

à Bologne.

Analyse des travaux.

§ I. Systèmes de fonctions. — Développements en série.

1. Tandis que l'étude des développements d'une fonction arbitraire, au sens général de Dirichlet, ou, comme on dit aussi, d'une fonction de variable réelle, constituait déjà, vers 1880, un chapitre considérable de l'analyse à la suite des travaux de Dirichlet, de Riemann, de Du Bois Reymond, de Dini, etc., on n'avait guère étudié que dans des cas particuliers les développements de fonctions analytiques en séries ordonnées suivant les fonctions d'un système donné, comme ceux considérés par C. Neumann, Heine, Thomé, Frobenius suivant les polynômes de Legendre, les fonctions de Bessel, les produits spéciaux de la forme $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. Mais à cette époque paraît le mémoire de Weierstrass, „Zur Funktionenlehre", qui contient son célèbre théorème sur les séries uniformément convergentes de fonctions analytiques, et qui permet d'aborder d'une façon générale l'étude des développements à caractère analytique, et c'est à cette étude que j'ai tâché d'apporter quelque contribution. Dans un mémoire [60] publié en 1882, j'étudie des séries de la forme $\sum \varphi_\nu(x) f_\nu(x)$ sous des hypothèses variées pour les deux systèmes de fonctions analytiques $\varphi_\nu(x)$ et $f_\nu(x)$; entre autres dans le cas où $\varphi_\nu(x) = c_\nu x^\nu$ et les $f_\nu(x)$ sont des fonctions régulières pour $x = 0$: hypothèse où se rangent à leur tour des cas particuliers importants. Je trouve quelles sont les fonctions régulières pour $x = 0$ qui admettent un développement de cette forme, j'en étudie les points singuliers en relation avec ceux de $f_\nu(x)$, et, parmi les cas spéciaux, j'envisage les séries de Lambert généralisées, qui donnent lieu à des relations, de nature arithmétique, de quelque intérêt. Dans ce mémoire se trouve, peut-être pour la première fois, le concept de „système de fonctions limitées" dans „leur ensemble", depuis si commun, et aussi un théorème qui correspond, pour les aires planes, à la célèbre proposition de Heine-Borel. Au même sujet se rapporte la note 135, où se trouve une