SUR UN DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS HOLOMORPHES.

PAR

GASTON JULIA

à PARIS.

Introduction.

$f(z)$ est une *fonction entière* de z, et on suppose $f(0)=0, f'(0)\neq 0$. Sans restreindre la généralité on pourra supposer $f'(0)=1$. Comme cas particulier $f(z)$ pourra être un *polynome*.

Les a_n $(n=0, 1, \ldots)$ étant des constantes complexes quelconques, envisageons la série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 f(z) + a_2 f(z^2) + \cdots + a_n f(z^n) + \cdots.$$

Dans le 1er chapitre nous étudions la convergence de (1), les a_n étant donnés *a priori*. On est conduit à associer à (1) la série entière (2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dont le rayon de convergence est ϱ qui peut-être nul ou infini.

Si $\varrho \leq 1$, la série (1) converge absolument dans $|z|<\varrho$ et uniformément dans tout cercle $|z|\leq \varrho-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ arbitrairement petit). Hors du cercle $|z|<\varrho$ la série (1) diverge pour $\varrho<|z|<1$; de plus si $f(z)$ est un polynome, la série (1) diverge aussi en tout point z où $|z|>1$ et si $f(z)$ est transcendante, les points de divergence de (1) sont denses partout hors de $|z|=1$ mais il peut y avoir des lignes de convergence uniforme hors de $|z|=1$, ces lignes ne peuvent d'ailleurs être coupées en plus d'un point par toute circonférence $|z|=r>1$.

Si $\varrho>1$, il y a 2 cas distincts:

a) $f(z)$ est un polynome de degré d: alors (1) converge absolument dans $|z|<\varrho^{\frac{1}{d}}$ et uniformément dans $|z|<\varrho^{\frac{1}{d}}-\varepsilon$, elle diverge pour $|z|>\varrho^{\frac{1}{d}}$;