SUR QUELQUES FORMES POSITIVES AVEC UNE APPLICATION À LA THÉORIE ERGODIQUE.

Par

ARNE BEURLING

à Upsal.

Les problèmes que nous allons considérer originent de l'observation que voici. Soit $X_1, X_2, \ldots X_n$ une suite finie de points dans un espace euclidien R_m à un nombre fini m de dimensions. Ces points déterminent n^2 triangles $\varDelta_{\mu,\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2, \ldots n$, où $\varDelta_{\mu,\nu} = \varDelta_{\nu,\mu}$ désigne le triangle ayant pour sommets l'origine et les points X_μ et X_ν, et dont les côtés ont pour longueurs $|X_\mu|$, $|X_\nu|$ et $|X_\mu - X_\nu|$. A chacun de ces triangles on peut faire associer une quantité non négative, l'excès triangulaire de $\varDelta_{\mu,\nu}$, définie ainsi:

$$|\varDelta_{\mu,\nu}| = |X_\mu| + |X_\nu| - |X_\mu -$$

La matrice formée des éléments $|\varDelta_{\mu,\nu}|$, $\mu, \nu = 1, 2,$ est évidemment symétrique et possède la propriété remarquable que la forme quadratique

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\mu \xi_\nu |\varDelta_{\mu,\nu}|$$

est positive, et cela pour tout n et pour tout choix des points X_μ.

Dans cette Note nous démontrerons d'abord quelques théorèmes de ce genre et nous ferons ensuite une application à la théorie ergodique des espaces fonctionnels L^p, $1 \leqq p \leqq 2$.

Sur quelques formes quadratiques.

Par le symbole $\{z\}$, z étant un nombre complexe, nous entendrons

$$\{z\} = \begin{cases} z \text{ pour } |z| \leq 1 \\ \dfrac{1}{\bar{z}} \text{ pour } |z| \geq 1, \end{cases}$$