ÜBER AREOLÄR-HARMONISCHE FUNKTIONEN.

VON

J. RIDDER

in GRONINGEN.

Einleitung.

Ist $f(z)$ eine in einem beschränkten Bereiche B der z-Ebene stetige, komplexwertige Funktion von $z = x + iy$, so bildet das über den Rand $R(J)$ eines abgeschlossenen, zu B gehörenden Intervalles J erstreckte Integral

$$\int_{R(J)} f(z)\, dz$$

eine in B (beschränkt) additive Intervallfunktion $\Phi_f(J)$. Wird die Ableitung von $\Phi_f(J) \equiv$ *die areoläre Ableitung von* $f(z)$ in einem Punkte $z \in B$, $D_z \Phi_f(J)$, durch den Grenzwert

$$\lim_{Q \to z} \frac{\int\limits_{R(Q)} f(z)\, dz}{m(Q)}$$

definiert, wobei Q ein z enthaltendes, in B liegendes, abgeschlossenes, achsenparalleles Quadrat mit Rand $R(Q)$ und Flächenmass $m(Q)$ ist, das sich in z zusammenzieht, so beweist man leicht, dass aus der Existenz einer (endlichen) Ableitung $f'(z)$ in z die von $D_z \Phi_f(J)$ folgt; und zwar ist dabei immer $D_z \Phi_f(J) = 0$.

Umgekehrt, hat $f(z)$ in jedem Punkte von B eine areoläre Ableitung gleich Null, so ist die additive Intervallfunktion $\Phi_f(J)$ identisch Null, und dadurch auch für jede samt seinem Innern in B liegende, einfache, geschlossene, rektifizierbare Kurve C

$$\int_C f(z)\, dz = 0,$$

somit, nach dem Moreraschen Satze, $f(z)$ analytisch (differenzierbar) in B.