SUR UNE FORMULE SOMMATOIRE GÉNÉRALE

PAR

ERNST LINDELÖF

à HELSINGFORS.

1. Dans son Mémoire: *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies,* daté de 1823, ABEL a établi la formule suivante[1]:

$$(1) \qquad \sum \varphi(x) = \int \varphi(x)dx - \frac{1}{2}\varphi(x) + 2\int_0^\infty \frac{\varphi(x+it)-\varphi(x-it)}{2i}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}$$

où $\sum \varphi(x)$ désigne »l'intégrale finie» de la fonction $\varphi(x)$, c'est à dire la solution de l'équation fonctionnelle: $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$. Après y être arrivé, ABEL continue en ces termes: »Cette expression de l'intégrale finie d'une fonction quelconque me paraît très remarquable, et je ne crois pas qu'elle ait été trouvée auparavant.» — En fait, l'expression en question avait déjà été trouvée par PLANA en 1820[2].

En 1825 ABEL est revenu sur la formule (1) et en a donné une nouvelle démonstration, dans un Mémoire intitulé: *L'intégrale finie $\sum^n \varphi(x)$ exprimée par une intégrale définie simple*[3]. Mais cette démonstration n'indique pas, non plus que la première, les conditions dans lesquelles est applicable la formule dont il s'agit.

Il est assez curieux que le remarquable résultat découvert par PLANA et ABEL ait dû attendre une démonstration rigoureuse jusqu'en 1889, date

[1] *Oeuvres complètes d'Abel* (édition SYLOW-LIE), t. I, p. 23.

[2] *Voir ibid.,* t. II, p. 290.

[3] *Ibid.,* t. I, p. 35.