SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

PAR

R. LIOUVILLE

À PARIS.

Abel a consacré quelques pages (Oeuvres, tome 2, n° 5), à l'étude des cas dans lesquels on sait intégrer l'équation suivante,

$$(y + s)\frac{dy}{dx} + p + qy + ry^2 = 0, \tag{1}$$

où p, q, r, s désignent des fonctions de x.

Ce type d'équations différentielles, le plus simple de tous ceux du premier ordre, après celui de Riccati, présente, pour cette raison, un véritable intérêt et, depuis les travaux d'Abel, il a été, à plusieurs reprises et sous des formes diverses, l'objet d'assez nombreuses recherches.

On peut, en ce qui le concerne, se placer à deux points de vue bien différents et presque opposés, selon que l'on s'attache à reconnaitre s'il existe une intégrale, dépendant de y d'une façon indiquée, par exemple algébrique, ou bien à trouver les caractères essentiels de la relation établie, d'après la nature même de l'équation proposée, entre l'inconnue y et la constante arbitraire qui s'y trouve impliquée, abstraction faite d'ailleurs du choix adopté pour la variable x.

Voici comment on peut concevoir ce qu'il y a d'essentiel dans une relation de cette espèce: il est clair que, si la formule

$$y = f(x, c), \tag{1}$$

définit, quel que soit c, une solution de l'équation (1), il est permis de substituer à ce paramètre une fonction $\varphi(c)$, quelconque, ne renfermant pas x; après cette substitution, l'inconnue, y, conserve certaines propriétés