DIE BEDEUTUNG DER ABEL'SCHEN ABHANDLUNG ÜBER DIE BINOMISCHE REIHE[1] FÜR DIE FUNCTIONENTHEORIE

VON

O. STOLZ
in INNSBRUCK.

CAUCHY hat in *Cours d'Analyse* (1821) Ch. VIII, § 5, die folgende Aufgabe gelöst.

(I). »Es seien alle für jeden Wert der *reellen* Veränderlichen ξ eindeutigen und stetigen complexen Functionen $f(\xi)$ zu ermitteln, wofür erstens bei beliebigen reellen Werten ξ, η das Additionstheorem

$$(1) \qquad f(\xi) \, . \, f(\eta) = f(\xi + \eta)$$

besteht, und zweitens $f(1)$ gleich einer gegebenen, von Null verschiedenen complexen Zahl

$$(2) \qquad a = A(\sin\alpha + i\sin\alpha) \qquad (A > 0, \ -\pi < \alpha \leqq \pi)$$

ist.» Die verlangten Functionen sind in der Formel

$$f(\xi) = A^{\xi}\big(\cos\xi(\alpha + 2k\pi) + i\sin\xi(\alpha + 2k\pi)\big)$$

enthalten, worin k jede beliebige, jedoch feste ganze Zahl sein darf.

Ersetzen wir in dieser Aufgabe die reelle Veränderliche ξ durch die aller complexen Werte fähige Veränderliche x und entsprechend in der Beziehung (1) ξ, η bezw. durch die beliebigen complexen Zahlen x, y, so erhalten wir eine ähnliche Aufgabe (II), auf die CAUCHY a. a. O. nicht eingegangen ist. Ihre Lösung gibt ABEL in der im Titel genannten Abhandlung vom Jahre 1826.[2]

[1] Oeuvres de N. H. ABEL, nouv. édit. par SYLOW et LIE. I. S. 219 f.

[2] Vgl. Oeuvres I., S. 229 f. Die Formel (3) findet sich S. 234 unter (13).