SUR UNE SÉRIE D'ABEL

PAR

S. PINCHERLE

à BOLOGNE.

1. Dans le mémoire posthume d'ABEL: »Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes»,¹ on trouve, à la page 73, une formule très remarquable; c'est la suivante:

$$(a) \quad \varphi(x + a) = \varphi(x) + a \frac{d\varphi(x + \beta)}{dx} + \frac{a(a - 2\beta)}{1 \cdot 2} \frac{d^2\varphi(x + 2\beta)}{dx^2} + \dots \\ + \frac{a(a - n\beta)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^n\varphi(x + n\beta)}{dx^n} + \dots$$

Ce développement est obtenu par l'Auteur en appliquant la méthode des fonctions génératrices ou, comme on dit à présent, la transformation de LAPLACE au développement donné par LEGENDRE:²

$$(b) \quad e^{av} = 1 + av e^{\beta v} + \frac{a(a - 2\beta)}{1 \cdot 2} v^2 e^{2\beta v} + \frac{a(a - 2\beta)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^3 e^{3\beta v} + \dots$$

La formule (a) semble avoir appelé l'attention d'ABEL d'une façon particulière; un autre de ses travaux³ renferme, en effet, la démonstration de la formule pour le cas où $\varphi(x) = x^n$, d'où résulte immédiatement la même formule pour tout polynôme entier. Dans ce cas, il n'y a rien à remarquer sur notre formule; mais dans des cas plus généraux, elle peut parfaitement

¹ Mém. XI du t. II de l'édition de SYLOW et LIE, p. 67.

² *Exercices de calcul intégral*, t. 2, p. 234. On obtient sans peine cette série comme application de la série de LAGRANGE.

³ Mém. X du t. I de l'édition citée, p. 102.