SUR UNE IDENTITÉ D'ABEL ET SUR D'AUTRES FORMULES ANALOGUES

PAR

J. L. W. V. JENSEN

à COPENHAGUE.

ABEL[1] à démontré l'extension suivante de la formule du binôme

$$(1) \qquad (x+\alpha)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \alpha(\alpha-\nu\beta)^{\nu-1}(x+\nu\beta)^{n-\nu}.$$

Dans une note à la mémoire d'ABEL, LIE[2] a dit que la formule (1) n'est qu'un cas spécial d'une formule donnée autérieurement par CAUCHY.[3] Voici la formule à laquelle se rapporte l'observation de LIE

$$(2) \qquad \frac{(x+\alpha+n)^n-(x+n)^n}{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu} (\alpha+n-\nu)^{n-\nu-1}(x+\nu)^{\nu},$$

où nous avons seulement changé les noms des variables. On voit aisément que la formule de CAUCHY se déduit de celle d'ABEL en prenant dans la dernière $\beta = -1$ et en remplaçant x par $x+n$. L'assertion de LIE n'est donc pas bien fondée, car c'est la formule (1) qui a la forme la plus générale. Du reste on peut déduire celle-ci de la formule (2) en faisant dans la dernière les substitutions

$$x \Big| -\frac{x}{\beta} - n, \quad \alpha \Big| -\frac{\alpha}{\beta}.$$

[1] *Démonstration d'une expression de laquelle la formule binôme est un cas particulier.* Journal für die Mathematik, t. 1, p. 159 (1826) = Oeuvres complètes (l'édition de SYLOW et LIE), t. I, p. 102.

[2] Oeuvres d'ABEL, l'édition citée, t. II, p. 294.

[3] Exercices de Mathématiques, 1ère année, p. 53, formule (36), (1826).