INTEGRALE MIT HYPERGEOMETRISCHEN INTEGRANDEN*.

Von

LOTHAR KOSCHMIEDER

in Graz.

1. Abweichend von manchen Strömungen vergangener Jahrzehnte haben einige Zweige der heutigen mathematischen Forschung, z. B. das funktionale Rechnen, die Aufmerksamkeit der Fachwelt wieder auf die Eigenschaften greifbarer Gebilde der Analysis gelenkt. In dieser Richtung liegt auch, was ich Ihnen jetzt vortragen will. Es betrifft die hypergeometrischen Funktionen[1,1], zunächst die Gausssche Reihe

$$(1.1) \qquad F(\alpha,\beta;\gamma;x) = \sum_{n}^{0,\,\infty} \frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)} x^n, \quad \text{wo} \quad (\alpha,n) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \text{ usw.},$$

$|x| < 1$; α, β, γ sind beliebige komplexe Parameter, von denen nur γ einer Einschränkung unterliegt, nämlich der, weder null noch eine negative ganze Zahl zu sein. Es ist bekannt, dass F sich durch 48 Integrale Eulerscher Art, mit binomischem Kerne, darstellen lässt. Um zwischen ihren beiden Hauptgestalten die Brücke mit einem einfachen bestimmten Integrale zu schlagen, hat vor kurzem Erdélyi[1,2], wie er sagt, eine allgemeinere (weil beide umfassende) Formel aufgestellt — mit hypergeometrischem Kerne; sie lautet[1,3]

$$(1.2) \qquad F(\alpha,\beta;\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\gamma-\nu)} \int_0^1 s^{\nu-1}(1-s)^{\gamma-\nu-1} F(\alpha,\beta;\nu;sx)\,ds,$$

$$|x| < 1, \quad 0 < \Re\,\nu < \Re\,\gamma.$$

---

* Vorgetragen am 18.VI.43 in den Mathematischen Besprechungen an der Technischen Hochschule Graz, am 30.VI.43 in der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

[1,1] Ihretwegen verweise ich auf das Werk von P. Appell—J. Kampé de Fériet: Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite. Paris 1926. Wo ich weniger bekannte ihrer Eigenschaften benutze, führe ich weiterhin deren Fundort in diesem Buche an, das ich kurz mit A.-K. bezeichne.

[1,2] A. Erdélyi, Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 8 (1937), 200—213.

[1,3] Siehe [1,2], S. 203, (2. 1).