LES FAMILLES DE CÔNES DE MÊME SOMMET QUI POSSÈDENT DES HARMONIQUES.

Par

RENÉ LAGRANGE

à DIJON.

J'ai montré dans un article antérieur[1] que les familles orthogonales de surfaces de révolution qui possèdent des harmoniques sont les cyclides de révolution, et que les équations différentielles qui fournissent ces harmoniques sont des équations de Bessel, de Legendre et de Lamé. Lorsqu'on se pose la même question pour les cylindres parallèles, ou pour les cônes de même sommet, on ne trouve aucune famille qui ne soit classique; ainsi, les seules familles de cylindres parallèles possédant des harmoniques sont les familles orthogonales de plans parallèles, de cylindres coaxiaux circulaires associés à leurs plans diamétraux, de cylindres paraboliques homofocaux, avec l'équation de Weber, et les cylindres elliptiques et hyperboliques homofocaux, avec l'équation de Mathieu. On ne trouve également que les cônes homofocaux, mais ce problème offre la particularité intéressante de conduire à la résolution d'une équation différentielle elliptique analogue à celle dont dépendent les familles de surfaces de révolution; la détermination de ces cônes résulte, en effet, de la résolution de l'équation

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 = a u^4 + 4 b u^3 + 6 c u^2 + 4 d u + e,$$

la seule différence résidant dans la nature des coefficients constants a, b, c, d, e, qui sont assujettis à la seule condition d'être réels pour les harmoniques de révolution[2], tandis qu'ils sont assujettis ici aux conditions $e = \bar{a}$, $d = -\bar{b}$, c réel. Ces conditions sont d'ailleurs invariantes dans toute rotation autour de l'origine, ce qui permet de simplifier l'équation, et, en particulier, d'annuler les coefficients

[1] «Les familles de surfaces de révolution qui possèdent des harmoniques», Acta mathematica, t. 71, 1939, p. 283—315.

[2] Loc. cit. p. 292.