EXTENSION NOUVELLE D'UN LEMME DE SCHWARZ.

PAR

GASTON JULIA

à PARIS.

On trouve dans les œuvres de SCHWARZ (tome 2, page 109) le lemme suivant.

Si $f(z)$ est holomorphe pour $|z|<1$ et si, dans tout ce domaine ($|z|<1$) on a $|f(z)|\leq 1$, avec $f(0)=0$, on a pour tout point $z\,(0<|z|<1)$ l'inégalité $|f(z)|<|z|$ sauf dans le cas où $f(z)$ est une fonction linéaire $ze^{i\theta}$, auquel cas $|f(z)|=|z|$.

On en peut conclure immédiatement que, hors le cas d'exception, $|f'(0)|<1$ *sans égalité possible.* C'est évident si $f'(0)=0$. Et si $f'(0)\neq 0$ on peut entourer o d'un cercle c assez petit pour que, z décrivant l'aire simple (C), $z_1=f(z)$ décrive aussi une aire simple (C_1), à un seul feuillet, limité par une courbe analytique C_1 fermée *intérieure à C et contenant l'origine.* Cela permet de conclure que $|f'(0)|<1$ car

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z^2}.$$

Or $\left|\frac{f(z)}{z^2}\right|<\left|\frac{1}{z}\right|$. Donc

$$|f'(0)|<\frac{1}{2\pi}\int\frac{|dz|}{|z|}=\frac{2\pi\varrho}{2\pi\varrho}=1,$$

ϱ étant le rayon de C.

Le lemme de SCHWARZ affirme que, hors le cas banal $f(z)=ze^{i\theta}$, si z décrit l'intérieur du cercle $|z|\leq\varrho<1$, son transformé $z_1=f(z)$ décrit une surface de RIEMANN *toute entière intérieure à ce cercle* $|f(z)|<\varrho$, en supposant que $z=0$ est un point invariant de la transformation.

Si l'on suppose maintenant que, pour $|z|<1$ on a encore $|f(z)|\leq 1$, mais que le point ζ invariant $(f(\zeta)=\zeta)$ n'est plus l'origine, mais un autre point *intérieur*