

ÜBER  $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2}$

UND VERWANDTE INTEGRALE

VON

L. SCHLÄFLI

in BERN.

Im ersten Bande von CAUCHY's vollständigen Werken findet sich ein *Mémoire sur les intégrales définies* aus dem Jahre 1814, worin p. 442 (g) und p. 488 die erwähnten Integrale behandelt werden. CAUCHY setzt sich, wie er selbst sagt, nur die Berechnung der reellen Componenten der in dieser Abhandlung vorkommenden Integrale vor, und seine Ergebnisse sind meistens richtig, aber nicht immer. Dass der Begriff der *valeur principale* eines Integrales, den CAUCHY aufstellt, nicht statthaft sei, braucht nicht erörtert zu werden; was er so nennt, ist eine Summe von Integralen, die einander nichts angehn. Auch die *intégrale singulière* ist ein bedenklicher Begriff; wo er zum ersten Male erläutert wird, p. 394, geschieht es am Integrale

$$\iint \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2} dx dz \quad (0 < x < 1, 0 < z < 1).$$

Niemand ist aber gehalten, dieses Doppelintegral zu verstehen, wenn über dessen Begränzung im Bereiche von  $(x = 0, z = 0)$  nichts gesagt wird. Setzt man

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} > 1, \quad x < 1, \quad z < 1$$

als Gränzen, wo  $\alpha, \beta$  positiv, aber beliebig klein sind, so ist  $-\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \frac{\pi}{4}$