ZUR REKURSIVEN FUNKTIONENTHEORIE

VON

HERBERT MESCHKOWSKI

Berlin-Dahlem

I. Einleitung

In den letzten Jahren sind Versuche unternommen worden, einen konstruktiven Aufbau der Analysis zu gewinnen durch Benutzung der Theorie der rekursiven Funktionen. R. L. Goodstein (Literaturverzeichnis [3], [4], [5]) hat eine Reihe von Sätzen aufgestellt, die als Analoga gelten können für bekannte Aussagen der klassischen Analysis. Er beschränkt sich dabei auf rationale Zahlen als Argument. Der Gedanke liegt nahe, diese Ergebnisse zu erweitern und auch „berechenbare“ irrationale Zahlen zuzulassen. Wie aus einer Arbeit von Specker [2] hervorgeht, stehen einem solchen Verfahren aber erhebliche Schwierigkeiten entgegen. Er zeigt u. a. folgendes:

Es sei $\mathfrak{R}_1$ die Klasse der primitiv rekursiven reellen Zahlen¹, $\mathfrak{R}_2$ die Klasse der primitiv rekursiven Dezimalbrüche, $\mathfrak{R}_3$ die der primitiv rekursiven Schnitte. Dann gilt $\mathfrak{R}_1 \supset \mathfrak{R}_2 \supset \mathfrak{R}_3$, wobei die auftretenden Inklusionen echt sind. Damit hängt es zusammen, dass eine Reihe von Sätzen der klassischen Analysis nicht ohne weiteres in der „rekursiven“ gelten.

Im Kapitel III der vorliegenden Arbeit sollen einige weitere Aussagen über (allgemein) rekursive Zahlen gemacht werden. Es wird insbesondere gezeigt, dass die Klasse $\mathfrak{R}$ der rekursiven reellen Zahlen eine wohlbestimmte Art von „Intervallschachtelung“ zulässt. Damit ist die Voraussetzung geschaffen zur Erweiterung einiger Sätze der Theorie von Goodstein (Kap. IV). Es handelt sich dabei um Aussagen über stetige Funktionen. Die Goodsteinsche Theorie enthält eine Reihe von Sätzen über differentierbare Funktionen, kann aber durch eine saubere Fassung des Stetigkeitsbegriffes noch ergänzt werden durch Sätze, die als Analoga zu bekannten klassischen Theoremen gelten können.

¹ Die Definitionen dieser Begriffe folgen im Kapitel II dieser Arbeit.