CHAPITRE II.

Théorie des invariants intégraux.

§ 5. *Propriétés diverses des équations de la dynamique.*

Soit F une fonction d'une double série de variables:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

et du temps t.

Supposons que l'on ait les équations différentielles:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Considérons deux solutions infiniment voisines de ces équations:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n,$$
$$x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \ldots, x_n + \xi_n, y_1 + \eta_1, y_2 + \eta_2, \ldots, y_n + \eta_n,$$

les ξ et les η étant assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés.

Les ξ et les η satisferont alors aux équations différentielles linéaires

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k, \end{aligned} \tag{2}$$

qui sont les équations aux variations des équations (1).

Soit ξ'_i, η'_i une autre solution de ces équations linéaires de sorte que:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi'_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi'_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta'_k, \\ \frac{d\eta'_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi'_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta'_k. \end{aligned} \tag{2'}$$