MASS- UND INTEGRATIONSTHEORIE IN STRUKTUREN.

VON

J. RIDDER

in GRONINGEN.

Einleitung.

Die von C. Carathéodory[1] aufgestellte, formale Messbarkeitstheorie fasst jedes äussere Mass als Mengenfunktion $\mu^*(A)$ der Mengen (A) des n-dimensionalen Euklidischen Raumes auf; es wird weiter charakterisiert durch vier-, jedes reguläre äussere Mass durch fünf Axiome. Mittels eines regulären äusseren Masses lässt sich für die Mengen (A) ein zugehöriges reguläres inneres Mass definieren[2], das zu den obengenannten fünf Axiomen analoge Eigenschaften hat. Diese Eigenschaften genügen jedoch nicht zur vollständigen Charakterisierung des regulären inneren Masses. Die Unstimmigkeit wird hervorgerufen durch das dritte Carathéodorysche Axiom, welches lautet: »Ist $V = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$, so ist stets $\mu^*(V) \leqq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \cdots + \mu^*(A_n) + \cdots$« und zu welchem beim inneren Masse $\mu_*(A)$ analog ist die Eigenschaft: »Ist $S = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$, mit $A_j \cdot A_k$ leer für jedes Paar (j, k) von ungleichen natürlichen Zahlen, so ist stets $\mu_*(S) \geqq \mu_*(A_1) + \mu_*(A_2) + \cdots + \mu_*(A_n) + \cdots$«. Ein von Carathéodory herrührendes Beispiel[3] zeigt, dass, obwohl schon aus den zwei ersten Eigenschaften des regulären inneren Masses hervorgeht, dass die mittels des inneren Masses charakterisierten messbaren Mengen einen Körper bilden, diese dennoch nicht immer einen σ-Körper zu bilden brauchen, sogar dann nicht, wenn alle fünf Eigenschaften erfüllt sind. A. Rosenthal hat darum das Carathéodorysche Axiomensystem für das reguläre äussere Masse ein völlig äquivalentes System an die

[1] Siehe C. CARATHÉODORY, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1914, S. 404—420; Vorlesungen über reelle Funktionen, 2e Aufl. (1927), Kap. 5 u. 6.

[2] Ein gewöhnliches inneres Mass wird von CARATHÉODORY nicht eingeführt.

[3] Siehe loc. cit. 1, zweites Zitat, S. 367—369.