Autour du théorème de Bombieri-Vinogradov

par

ETIENNE FOUVRY (1)

Université de Bordeaux I
Talence, France

I. Présentation des résultats

Pour étudier la répartition, en moyenne, dans les progressions arithmétiques, de la suite de nombres réels (x_n), on définit, pour a entier non nul, la somme $S((x_n), a, X, Q)$ par la formule :

$$S((x_n), a, X, Q) = \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,a)=1}} \left| \sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv a[q]}} x_n - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leq X \\ (n,q)=1}} x_n \right|$$

et on s'intéresse aux valeurs de θ, pour lesquelles on a :

$$(*) \qquad \forall A > 0,\ \forall \eta > 0,\ \textit{on a } S((x_n), a, X,\ X^{\theta-\eta}) \ll_{\eta, A, a} X\,(\log X)^{-A}.$$

(On dira alors que θ est un exposant de répartition de (x_n) relatif à a.)

Lorsque (x_n) est la fonction caractéristique d'une suite d'entiers, la valeur de θ est capitale dans les problèmes de crible (condition $R(\varkappa, \alpha)$ de [11]), et toute amélioration de la valeur de l'exposant de répartition se répercute immédiatement sur les estimations obtenues.

Le célèbre théorème de Bombieri-Vinogradov ([1], [20]) entraîne que (*) est vrai pour $x_n = \Lambda(n)$ et $\theta = 1/2$ (majoration d'ailleurs uniforme en a). La démonstration de ce théorème a été simplifiée ([10], [18], [19]) et étendue à d'autres suites (x_n) ([16], [21]), tout en mettant en évidence l'importance de l'écriture de (x_n) sous forme bilinéaire. La valeur critique $\theta = 1/2$, due essentiellement à l'inégalité de grand crible, n'a pas été franchie pour $x_n = \Lambda(n)$, alors qu'on suppose que $\theta = 1$ est un exposant de répartition ([5]).

---

(1) Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226.