SOLUTION DU PROBLÈME D'ÉQUIVALENCE DES CLASSES DE FONCTIONS INDÉFINIMENT DÉRIVABLES.

PAR

H. CARTAN et S. MANDELBROJT

à STRASBOURG. à PARIS.

Introduction.

Soit une suite de quantités A_n positives (finies ou infinies, non nulles; $n = 1, 2, \ldots$). Nous disons qu'une fonction réelle de la variable réelle x, définie et indéfiniment dérivable sur un intervalle I (ouvert ou fermé, fini ou infini), appartient à la *classe* $\{A_n\}_I$ si à chaque $x_0 \in I$ on peut associer un voisinage $V(x_0)$ et un nombre fini $\lambda > 0$, de manière que les dérivées successives de f satisfassent aux inégalités

$$|f^{(n)}(x)| \leq \lambda^n A_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pour tout x qui appartient à I et à $V(x_0)$. Dans le cas où I est *compact* (c'est-à-dire borné fermé), cette définition coïncide avec la définition classique de Hadamard-Denjoy: existence d'un λ tel que les inégalités ci-dessus aient lieu pour tout $x \in I$. Dans le cas d'un intervalle quelconque I, une fonction f appartient à la classe $\{A_n\}_I$ si elle appartient à la classe $\{A_n\}_{I'}$ sur tout intervalle compact I' contenu dans I.

Chaque suite $\{A_n\}$ définit, sur chaque intervalle, une classe de fonctions. Le problème d'équivalence posé par Carleman[1] consiste à chercher à quelles conditions deux suites $\{A_n\}$ et $\{A'_n\}$ définissent, sur tel ou tel intervalle, *la même* classe; plus généralement:

Etant donné un intervalle I, à quelles conditions doivent satisfaire deux suites $\{A_n\}$ et $\{A'_n\}$ pour que la classe $\{A_n\}_I$ soit contenue dans la classe $\{A'_n\}_I$?

---

[1] Voir CARLEMAN, Fonctions quasi-analytiques (*Collection Borel,* Paris 1926), p. 76.