LIE-GRUPPEN MIT BANACHRÄUMEN ALS PARAMETERRÄUME

VON

BERNHARD MAISSEN

Zürich, Schweiz[1]

I. Einleitung

Sei E ein Banachraum, $L(E)$ der Raum der stetigen Endomorphismen $E \to E$ und $GL(E)$ die Gruppe der stetigen Automorphismen $E \to E$. Es gilt:

a) $GL(E)$ ist in der Normtopologie von $L(E)$ offen in $L(E)$. Ist nämlich $\alpha \in GL(E)$, so gehört die ganze offene Kugel $\|\varphi - \alpha\| < \|\alpha^{-1}\|^{-1}$ mit Zentrum α zu $GL(E)$, denn man hat für jedes φ aus dieser Kugel

$$1 > \|\alpha - \varphi\| \|\alpha^{-1}\| \geqslant \|(\alpha - \varphi)\alpha^{-1}\| = \|\iota - \varphi\alpha^{-1}\|$$

(ι identischer Automorphismus), und wenn man hier $\psi = \iota - \varphi\alpha^{-1}$ setzt, so ist die Reihe $\sum_0^\infty \psi^\nu$ konvergent und gleich $(\iota - \psi)^{-1} = (\varphi\alpha^{-1})^{-1}$. $\varphi\alpha^{-1}$ besitzt also ein Inverses und somit auch φ.

b) Betrachtet man Differenzierbarkeit von Abbildungen zwischen Banachräumen im Sinne von Fréchet, wonach also eine Abbildung $f: E \to F$ differenzierbar ist, wenn gilt

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + |h| r(x,h)$$

$x, h \in E$, $f'(x)$ ein (in h) stetiger linearer Operator $E \to F$ und $r(x,h) \to 0$ für $h \to 0$, so sind die Abbildungen $\lambda_\alpha: \varphi \to \alpha\varphi$ und $\varrho_\alpha: \varphi \to \varphi\alpha$ trivialerweise differenzierbare Abbildungen von $GL(E)$ auf $GL(E)$. Weiterhin ist aber auch die Abbildung $\varphi \to \varphi^{-1}$ von $GL(E)$ auf $GL(E)$ differenzierbar. Zum Beweis dürfen wir den Argumentzuwachs ξ so einschränken, dass

---

[1] Ich erwähne in Dankbarkeit, dass ich bei der Ausführung dieser Arbeit aus der Fritz Hoffmann – La Roche-Stiftung zur Förderung wissenschaftlicher Arbeitsgemeinschaften in der Schweiz unterstützt worden bin.