ÜBER PERIODISCHE APPROXIMATIONEN ALGEBRAISCHER ZAHLEN

VON

HERMANN MINKOWSKI

IN ZÜRICH.

Abel sagt an einer Stelle (Oeuvres, t. II, p. 217) mit Bezug auf das Problem der algebraischen Auflösung der Gleichungen: »Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible». Eben diese Weisung befolgend, können wir auch einer anderen, noch unerledigten Aufgabe auf dem mannigfaltigen Gebiete der Auflösung der Gleichungen näherzutreten versuchen. Wir wollen hier die Frage behandeln:

Welche algebraische Zahlen besitzen analoge periodische Approximationen, wie sie die reellen algebraischen Zahlen zweiten Grades vermöge der Periodicität ihrer Entwicklungen in gewöhnliche Kettenbrüche aufweisen.

§ 1. *Periodische Substitutionenketten.*

1. Es sei α eine beliebige Grösse und es werde $l = 1$ oder $= 2$ gesetzt, je nachdem α reell oder complex ist. Wenn α eine *algebraische Zahl n^{ten} Grades,* d. h. eine Wurzel einer im Bereiche der rationalen Zahlen irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades ist, so kann der Ausdruck

$$\xi = x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n$$

für ganze rationale Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die nicht sämmtlich Null sind, niemals verschwinden, aber, wofern $n > l$ ist, wohl dem Werthe Null beliebig nahe kommen. Wir machen hier stets die Annahme $n > l$. Über