SUR LES SÉRIES DE MAC-LAURIN À PLUSIEURS VARIABLES

PAR

HENRI DULAC

à Grenoble.

1. La théorie des séries de Taylor et de Mac-Laurin à plusieurs variables présente, dès ses débuts, une importante lacune qui a été signalée par plusieurs mathématiciens.[1] Pour nous borner au cas de deux variables, soit

$$(1) \qquad F(x, y) = {}^{(n)}\sum f_n(x, y) \equiv {}^{(n)}\sum (a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \cdots + a_{0,n}y^n)$$

une série de polynomes homogènes. Dans les théories classiques, on sépare chaque terme f_n en ses éléments et l'on considère la serie double:

$$(2) \qquad {}^{(p,q)}\sum a_{p,q}x^p y^q .$$

Si cette série (2) converge absolument pour $x = x_0$, $y = y_0$, elle converge absolument dans le domaine $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ et represente dans ce domaine, une fonction analytique et holomorphe de x, y. D'où une suite de conséquences classiques.

Mais si on laisse intacts les termes de la série (1), que peut-on dire sur la convergence d'une telle série et sur la fonction qu'elle représente? En particulier, *si une série* (1) *converge uniformément pour toutes les valeurs réelles de* x, y *suffisamment petites, converge-t-elle pour les valeurs imaginaires et représente-t-elle une fonction analytique de* x, y, *holomorphe pour* $x = 0$, $y = 0$?[2]

L'affirmative paraissait très probable; mais il n'en existait pas de démonstration rigoureuse. J'ai pu établir cette démonstration:[3] *une série dont les*

[1] Voir une Note de M. Painlevé (Comptes rendus 2e semestre 1899, p. 27).

[2] En dehors de son intérêt général, la question se pose, ainsi que nous le verrons, dans des applications importantes.

[3] Comptes Rendus: 3 août 1903.