EIN SATZ ÜBER DIE ENDLICHEN EINFACHEN GRUPPEN.*

Von

L. RÉDEI

in SZEGED (UNGARN).

§ 1. Einleitung.

Eine Gruppe[1] mit lauter Abelschen maximalen Untergruppen ist stets auflösbar (s. unten) und somit nichteinfach. Umgekehrt folgt hieraus, dass eine (nichtzyklische) einfache Gruppe mindestens eine nichtabelsche maximale Untergruppe haben muss. Es liegt als nächster Schritt nahe diejenigen einfachen Gruppen zu untersuchen, die lauter Abelsche zweitmaximale[2] Untergruppen haben. Hierüber beweisen wir den folgenden:

Satz. 1°. *Eine Gruppe ist einfach, wenn alle maximalen Untergruppen nichtabelsch sind ohne Zentrum, mit lauter Abelschen maximalen Untergruppen.*

2°. *Es gilt die Umkehrung: Hat eine einfache Gruppe lauter Abelsche zweitmaximale Untergruppen, so sind alle maximalen Untergruppen ohne Zentrum (folglich nichtabelsch).*

3°. *Es gibt nur eine einfache Gruppe von gerader Ordnung mit lauter Abelschen zweitmaximalen Untergruppen, das ist die Ikosaedergruppe* $\mathfrak{G}_{60}$.

Bemerkung. Aus 3° folgt, dass eine einfache Gruppe von gerader Ordnung (> 60) mindestens eine nichtabelsche zweitmaximale Untergruppe enthält.

Bekanntlich vermutet man, dass es überhaupt keine (nichtzyklischen) einfachen

* Ein Vortrag des Verfassers gehalten am 26. April 1948 im Seminar von Prof. T. Nagell an der Universität in Uppsala.

[1] Von unendlichen Gruppen soll völlig abgesehen werden, »Gruppe« heisst »endliche Gruppe«.

[2] Wir nennen eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von einer Gruppe $\mathfrak{G}$ zweitmaximal, wenn es eine Untergruppe $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}$ gibt, so dass $\mathfrak{H}$ maximal in $\mathfrak{K}$, letzteres wieder maximal in $\mathfrak{G}$ enthalten ist. Das schliesst selbstverständlich nicht aus, dass sich $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ auch durch längere Untergruppenketten $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{K}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{K}_e \subset \mathfrak{G}$ ($e \geqq 2$) verbinden lassen. Wenn wir über die zweitmaximalen Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Aussage machen, so soll stets mit einverstanden sein, dass sie auch existieren, d. h. $\mathfrak{G}$ weder eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung noch $\mathfrak{G} = 1$ (Einheitsgruppe) ist; offenbar sind diese die einzigen Gruppen ohne zweitmaximale Untergruppen.