ALGEBRAISCH-ZAHLENTHEORETISCHE BETRACHTUNGEN ÜBER RINGE. I.

Von

L. RÉDEI und T. SZELE
in SZEGED (Ungarn).[1]

§ 1. Einleitung.

Die Polynome in einem Ring erzeugen dort zugleich eine Funktion[2], auf diesem Wege entstehen aber im allgemeinen nicht alle Funktionen, die sich im Ringe erklären lassen. Wir werfen das Problem auf, dass man einen weiteren Ring angibt, in dem sich die Funktionen des ersten Ringes durch Polynome darstellen lassen. Selbstverständlich verlangen wir eine einfache, gut brauchbare „Darstellung". Wir werden ein Prinzip angeben, das unter Umständen ermöglicht unser Problem auf eine gewisse Art zu lösen, die an Einfachheit nichts zu wünschen übriglässt. Als Anwendung werden wir dann die Frage in einem einfachen, für die Algebra und Zahlentheorie gleich wichtigen Fall ausführlich untersuchen, teilweise — und zwar den Restklassenring mod p^e (s. unten) — mit vollem Erfolg. Zu unseren Untersuchungen haben einige früheren Arbeiten von mehreren Autoren eine Anleitung gegeben, worauf wir später unten zu sprechen kommen.

Immer bezeichnen R, S, T, U einen Ring, insbesondere K den Körper der rationalen Zahlen, G den Ring der ganzen rationalen Zahlen, $K^{(n)}$ einen algebraischen Zahlkörper n-ten Grades über K, $G^{(n)}$ den Ring der ganzen Zahlen von

---

[1] An dieser ersten und der späteren zweiten Mitteilung hat der erste (RÉDEI) bzw. zweite (SZELE) von uns den vorwiegenden Anteil.

[2] Bekanntlich sind die Ringe die allgemeinsten Mengen (Strukturen), in denen man Polynome zu erklären pflegt. Meistens schreibt man dabei die Existenz des Einselementes vor, von dieser Einschränkung kann man sich frei machen, so dass man einen Oberring mit Einselement zu Hilfe nimmt und nur die Polynome in diesem betrachtet, deren Koeffizienten im gegebenen Ring liegen. Dagegen beschränken wir uns auf kommutative Ringe, da sonst zwischen den Polynomen und den durch sie erzeugten Funktionen kein einfacher Zusammenhang (keine homomorphe Beziehung) besteht (s. unten).