EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE DARSTELLUNG GANZER ZAHLEN DURCH BINÄRE KUBISCHE FORMEN MIT POSITIVER DISKRIMINANTE.

VON

WILHELM LJUNGGREN.
in OSLO.

§ 1.

Es sei $f(x, y) \equiv ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = f(a, b, c, d) =$ eine irreduzible binäre kubische Form mit ganzzahligen Koeffizienten und mit der Diskriminante D. Die Aufgabe, sämtliche Lösungen in ganzen Zahlen x und y der unbestimmten Gleichung

$$f(x, y) = 1 \tag{1}$$

zu bestimmen, ist noch nicht vollständig gelöst worden. Im Falle $D < 0$ gilt bekanntlich der folgende Satz von DELAUNAY [1, 2] und NAGELL [1]:[1]

Die Gleichung (1) *hat höchstens drei Lösungen in ganzen Zahlen x und y, die folgenden Fälle ausgenommen: Ist (a, b, c, d) äquivalent* $(1, 0, 1, 1)$ *oder* $(1, -1, 1, 1)$, *so gibt es genau vier Lösungen; ist (a, b, c, d) äquivalent* $(1, 0, -1, 1)$, *so gibt es genau fünf Lösungen. Ist (a, b, c, d) nicht äquivalent einer Form* $(1, p, q, 1)$, *so hat* (1) *höchstens zwei Lösungen.*

Im Falle $D > 0$ gilt dieser Satz nicht. So hat zum Beispiel die Gleichung

$$f(x, y) \equiv x^3 + px^2y - (p + 1)xy^2 + y^3 = 1$$

wenigstens die fünf Lösungen: $x = 1$, $y = 0$; $x = 0$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 1$; $x = 1$, $y = p$; $x = -p - 1$, $y = 1$. Hier ist $D = (p^2 + p - 3)^2 - 32 > 0$, falls $p \geqq 3$ oder

[1] Ein Verzeichnis der angeführten Arbeiten findet sich am Ende dieser Abhandlung.