ÜBER EINE METHODE ZUR LÖSUNG DER WÄRMELEITUNGS-GLEICHUNG.

Von

PENTTI LAASONEN

in TAMPERE (FINNLAND).

In ihrem beachtenswerten Aufsatz in den Mathematischen Annalen (Bd. 100, 1928) legen COURANT, FRIEDRICHS und LEWY eine Methode zur Lösung der in der Physik oft vorkommenden elliptischen und hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen vor, bei welcher der Raum der n stetigen Variablen durch ein n-dimensionales Gitternetz und die partiellen Differentialquotienten durch die entsprechenden in den Gitterpunkten definierten Differenzenquotienten ersetzt werden, womit die Aufgabe in ein einfaches System von Differenzengleichungen übergeht. In manchen Fällen kann die Konvergenz der elementar auffindbaren Lösungen dieses Systems für gegen Null abnehmende Maschenweite nachgewiesen werden. Auch in bezug auf die Normalform der parabolischen Gleichung, die sog. Wärmeleitungsgleichung, wird dies in dem einfachsten Fall durchgeführt, der die quellenlose Wärmeleitung in einem zweiseitig unendlichen linearen Leiter zum Gegenstand hat.

Im folgenden wird der allgemeinere, beiderseitig begrenzte und mit inneren Quellen versehene lineare Wärmeleiter, d. h. die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit gegebenen Randwerten behandelt. Wir wollen dabei vor allem betonen, dass eine von der bisherigen etwas abweichende Wahl der Differenzenquotienten im Hinblick auf die Einfachheit des Konvergenzbeweises vorteilhaft ist, so dass der Existenzbeweis für die Lösung der Differentialgleichung sich in dem vorliegenden regulären Fall auf ganz elementare Betrachtungen gründen lässt.

Es gilt diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\varkappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + q(x, t) = 0 \qquad (\varkappa^2 > 0) \tag{1}$$