Acta Math., 183 (1999), 145–169

Lemme de Schwarz réel et applications géométriques

par

GÉRARD BESSON
Université de Grenoble I
Saint-Martin d'Hères, France

GILLES COURTOIS
École Polytechnique
Palaiseau, France

et

SYLVESTRE GALLOT
Université de Grenoble I
Saint-Martin d'Hères, France

1. Introduction

Le lemme de Schwarz (replacé dans un contexte géométrique par Pick) montre que toute application holomorphe du disque unité de $\mathbf{C}$ dans lui-même est contractante lorsque le disque est muni de la métrique hyperbolique (de courbure constante -1). De plus, si la différentielle est isométrique en au moins un point, l'application est une isométrie hyperbolique (globale) du disque dans lui-même, c'est-à-dire une homographie.

Ce lemme a suscité de nombreuses extensions en dimension supérieure (citons pour mémoire les travaux de L. Ahlfors, S. T. Yau, N. Mok, ...). Nous ne retiendrons ici que le résultat suivant, énoncé dans [Mo], dont nous donnons une preuve en appendice ; c'est en effet celui qui est le plus proche de l'esprit du présent article.

1.1. PROPOSITION. — *Soient X et Y deux variétés kählériennes de même dimension, Y étant supposée compacte. Supposons qu'en tout point les courbures de Ricci de X et Y vérifient :*

$$\mathrm{Ricci}_{g_Y} \geqslant -g_Y \quad et \quad \mathrm{Ricci}_{g_X} \leqslant -g_X,$$

où g_Y et g_X sont les métriques riemanniennes respectives de Y et de X. Alors toute application holomorphe $F: Y \to X$ vérifie

$$|\operatorname{Jac} F(y)| \leqslant 1 \quad pour\ tout\ y \in Y.$$

De plus si, en un point $y \in Y$, on a $|\operatorname{Jac} F(y)| = 1$, alors $d_y F$ est isométrique.

Lorsque X et Y sont compactes, et si X est de courbure sectionnelle négative, chaque classe d'homotopie d'applications de Y dans X contient exactement une application harmonique (cf. [ES]).