LES CONGRUENCES PLANES DE CONIQUES QUI N'ONT QUE DEUX POINTS FOCAUX

PAR

RENÉ LAGRANGE

à Dijon

Introduction

J'ai montré dans un article paru il y a quelques années que les congruences de courbes du plan se prêtent à des développements semblables à ceux de l'espace lorsqu'on substitue la condition d'un contact d'ordre supérieur à 1 avec l'enveloppe, à celle d'un contact simple, et ai appliqué cette idée aux congruences de cercles.[1] Bien entendu, les résultats s'appliquent par transformation projective aux congruences de coniques qui ont deux points fixes distincts. Lorsque les deux points donnés sont confondus, c'est-à-dire lorsque les coniques sont tangentes en un point fixe, une étude analogue peut être aisément faite à l'aide de paraboles ayant une direction asymptotique donnée. Il m'a paru intéressant de déterminer les formules générales concernant les coniques ayant deux points fixes quelconques, à distance finie ou non, et distincts ou confondus. Il se trouve que celles-là sont assez remarquables.

La correspondance entre les éléments focaux associés fournit une intéressante transformation de contact de l'espace, lorsque les deux points focaux de chaque conique engendrent deux domaines à deux dimensions.

Les congruences dont un des points focaux décrit une courbe sont celles qui se décomposent en une simple infinité de faisceaux de coniques, chaque faisceau étant formé de coniques tangentes en un même point A, et passant en outre par les deux points fixes de la famille. On montre en particulier que, lorsque 4 coniques du même faisceau de sommet A varient en osculant leurs vraies enveloppes, les 4 droites focales issues de A forment un faisceau de birapport constant, et les courbures de ces 4

[1] « Cf. Sur les congruences de cercles du plan », *Bull. Sc. Math.*, t. 71 (1947), p. 1–23.