SUR LA POSTULATION GENERIQUE DES COURBES RATIONNELLES

BY

A. HIRSCHOWITZ

Université de Nice, France

§ 0. Introduction

Dans un récent travail, Hartshorne demande (en particulier) le degré des surfaces de $\mathbf{P}_3$ contenant une courbe rationnelle suffisamment générale ([H1] Remark 3.3.1). L'objet du présent travail est de démontrer le résultat conjecturé par Hartshorne en prouvant le

THÉORÈME 0.1. *Soient d et m deux entiers naturels vérifiant $dm+1 \geqslant \binom{m+3}{3}$. Alors il existe une courbe rationnelle lisse de degré d dans $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ et $\binom{m+3}{3}$ points sur cette courbe tels que la seule section globale de $O_{\mathbf{P}_3}(m)$ s'annulant sur ces points soit la section nulle.*

On peut observer que cet énoncé géométrique admet la traduction algébrique suivante :

THÉORÈME 0.2. *Soient d et m deux entiers naturels vérifiant $dm+1 \geqslant \binom{m+3}{3}$. Alors il existe quatre polynômes, P_1, P_2, P_3, P_4 à une variable de degré au plus d, tels que pour tout polynôme homogène non nul R à quatre variables et de degré au plus m, le polynôme $R(P_1, P_2, P_3, P_4)$ soit non nul.*

La démonstration se fait par récurrence sur m conformément au schéma suivant : on fixe une quadrique Q dans $\mathbf{P}_3$ (avec un plan, à la place de la quadrique, la méthode semble plus difficile à mettre en oeuvre). Si C est une courbe rationnelle de degré d coupant Q en $(m+1)^2$ points en « *position générale* » alors toute section de $O_{\mathbf{P}_3}(m)$ s'annulant sur C s'annule sur Q. La division par une équation de Q fournit alors une section de $O_{\mathbf{P}_3}(m-2)$ à laquelle on essaie d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Les difficultés de ce programme naïf sont les suivantes : une courbe rationnelle irréductible de degré d coupe Q en $2d$ points et non en $(m+1)^2$. On doit donc considérer des courbes réductibles pour augmenter artificiellement le nombre de « points d'intersection ». La principale difficulté consiste précisément à ajuster ce nombre : elle est résolue aux §§ 4 et 5 avec la définition des schémas U : ici on a recours à des courbes rationnelles avec nilpotents. La deuxième difficulté est constituée par le problème de position générale sur la quadrique dont la solution, qui