

RESOLUTION ANALYTIQUE DES PROBLEMES DE BELLMAN-DIRICHLET

PAR

P. L. LIONS

Université P. et M. Curie, Paris, France

Introduction

Le contrôle de processus de diffusions stoppés à la sortie d'un ouvert O ($O \subset \mathbf{R}^N$) conduit, via la programmation dynamique, à l'étude de problèmes de Dirichlet non linéaires, elliptiques du 2^o ordre. Dans ce travail, nous présentons une méthode de résolution de ces problèmes à l'aide de techniques d'équations aux dérivées partielles.

Ainsi nous montrons notamment que le problème suivant

$$\max_{1 \leq i \leq m} \{A_i u - f_i\} = 0 \quad \text{p.p. dans } O, \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (1)$$

admet une unique solution dans $W^{2,\infty}(O)$, où O est un ouvert de \mathbf{R}^N , de frontière Γ régulière, où A_1, \dots, A_m sont des opérateurs uniformément elliptiques du deuxième ordre à coefficients réguliers et où f_1, \dots, f_m sont des données régulières. Nous supposons uniquement que les coefficients d'ordre zéro des opérateurs A_i sont assez grands (voir pour l'énoncé et les hypothèses précises le paragraphe 2, ainsi que les résultats complémentaires du paragraphe 4).

La classe des problèmes (1) a été introduite par N. V. Krylov qui dans [11] et [12] traite le cas $N=2$ et le cas $O=\mathbf{R}^N$. Par la suite le cas $m=2$ a été résolu par H. Brézis et L. C. Evans [3], puis le cas d'opérateurs à coefficients constants, simultanément, par L. C. Evans et A. Friedman [7], et P. L. Lions et J. L. Menaldi [16] où d'autres résultats partiels de résolution sont donnés.

Ainsi que nous l'avons dit ci-dessus, le problème (1) correspond à un problème de contrôle stochastique qui est détaillé au paragraphe 1. Le paragraphe 2 comporte les résultats principaux, dont les démonstrations sont faites au paragraphe 3. Enfin au paragraphe 4 nous donnons quelques résultats complémentaires concernant la résolution de (1) (sans supposer les termes d'ordre zéro des opérateurs A_i assez grands).

Cet article fait suite à un précédent article [14] où l'auteur étudie le cas dégénéré pour $O=\mathbf{R}^N$ par des méthodes probabilistes. Dans une étude ultérieure nous nous intéres-