ÜBER GEWISSE KLASSEN DOPPELTPERIODISCHER FUNKTIONEN

VON

FRIEDHELM ERWE

in Bonn

§ 1. Einführung

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion $\mathfrak{f}(z)$ des komplexen Arguments $z=x+iy$ (x, y reell) lauten:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathfrak{f}=0.$$

Man kann nun die Frage nach denjenigen in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ bis zur Ordnung $n+1$ stetig differentiierbaren Funktionen $\mathfrak{f}$ stellen, die dem Differentialgleichungssystem

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}\mathfrak{f}=0$$

genügen. Dabei bedeutet $(\partial/\partial x+i(\partial/\partial y))^{n+1}$ den $(n+1)$-mal angewandten Differentialoperator $\partial/\partial x+i(\partial/\partial y)$, also nicht anderes als den Differentialoperator

$$\sum_{\nu=0}^{n+1}\binom{n+1}{\nu}i^{\nu}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1-\nu}\,\partial y^{\nu}}.$$

Sukzessive Integration zeigt sofort, daß die Menge der Lösungen dieses Systems übereinstimmt mit der Menge $\mathfrak{H}^n(\mathfrak{G})$ der Funktionen

$$\mathfrak{f}(z)=f_0(z)+f_1(z)\,\bar{z}+\cdots+f_n(z)\,\bar{z}^n \tag{1}$$

mit in $\mathfrak{G}$ regulären Funktionen $f_0(z)$, $f_1(z)$, … $f_n(z)$. Abgesehen davon, daß die funktionentheoretischen Eigenschaften dieser Klasse an sich einer Untersuchung wert sein dürften, ergibt sich von diesen Funktionen aus ein bequemer Zugang zu anderen Fragen. Z. B. beherrschen sie auch die Differentialgleichung

10 – 573804. *Acta mathematica*. 97. Imprimé le 14 juin 1957.