SOUS-ESPACES INVARIANTS DE TYPE FONCTIONNEL DANS LES ESPACES DE BANACH

PAR

B. BEAUZAMY

Université Claude Bernard
Lyon, France

Nous nous intéressons, dans les pages qui suivent, aux opérateurs T, linéaires continus, d'un espace de Banach E dans lui-même, possédant la propriété suivante, que nous notons $\mathfrak{H}$ (le symbole $\not\to$ significant « ne tend pas ») :

$$\mathfrak{H} : \|T\| = 1 \quad \text{et} \quad \exists x_0 \in E, \text{ tel que } T^n x_0 \not\to 0, \quad n \to \infty.$$

La question de savoir si un tel opérateur possède nécessairement un sous-espace invariant non trivial est assez ancienne et reste ouverte (rappelons qu'un sous-espace vectoriel fermé F est dit invariant par T si $TF \subset F$; il est non trivial si $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$).

Nous allons montrer qu'avec une hypothèse supplémentaire sur T, que l'on peut juger assez faible (qui est, en tout cas, beaucoup plus faible que celles déjà connues), elle admet une réponse positive; les sous-espaces invariants ainsi construits seront en outre d'un type très particulier; nous reviendrons sur ce point par la suite (au § 5).

Comme c'est l'usage, les sous-espaces invariants que nous construirons seront en fait hyper-invariants, c'est-à-dire invariants par tout opérateur qui commute avec T. C'était déjà le cas pour les résultats obtenus par divers auteurs dans cette direction. Mentionnons-les : — Si T et ${}^tT$ vérifient $\mathfrak{H}$, dans E et E' respectivement, et si E est réflexif, T possède un sous-espace hyper-invariant non trivial (en abrégé S.H.N.T.) (Colojoară-Foiaş [3], p. 136, cor. 1.10; voir aussi B. Beauzamy [2]).

— Si le spectre de T est contenu dans le cercle unité, n'est pas réduit à un point, et si

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\log \|T^n\|}{1+n^2} < \infty, \tag{1}$$

T a un S.H.N.T. (Wermer [9] avec quelques hypothèses techniques supplémentaires; Colojoară-Foiaş [3], p. 154, cor. 3.3). Le cas où le spectre de T est réduit à un point a été traité, mais sous une hypothèse un peu plus forte que (1), par A. Atzmon [1].

5 – 792901 *Acta mathematica* 144. Imprimé le 13 Juin 1980