Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev sur le groupe de Heisenberg

Jamel Benameur

Résumé

Pour $0 < s < \frac{N}{2}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{N}$ $(N = 2d+2)$, on démontre que toute suite bornée de $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ s'écrit, à une sous-suite près, comme la somme presque orthogonale d'un terme tendant vers 0 dans $L^p(\mathbb{H}^d)$ et d'une superposition de termes du type $h_n^{-\frac{N}{p}}\ \psi(\delta_{h_n^{-1}}(v_n^{-1}.v))$, où $\psi \in \dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$, $(h_n)_n$ est une suite de réels positifs, et $(v_n)_n$ est une suite de points de $\mathbb{H}^d$.

Abridged English Version

This work is devoted to the description of the defect of compactness of the Sobolev embedding on the Heisenberg group (see [3])

$$\dot{H}^s(\mathbb{H}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{H}^d),$$

where d belongs to $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $0 < s < d+1$ and p is given by $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{2d+2}$.

Namely, we prove that any bounded sequence in $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ can be written, up to a subsequence, as an almost orthogonal sum of a term going strongly to zero in $L^p(\mathbb{H}^d)$ and a superposition of terms like $h^{-N/p}\psi\Big(\delta_{h_n}(v_n^{-1}.v)\Big)$, where $\psi \in \dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$,

Received by the editors June 2007 - In revised form in October 2007.

Communicated by P. Godin.

2000 *Mathematics Subject Classification :* 42-XX, 35-XX.

Key words and phrases : Groupe de Heisenberg, injection de Sobolev, défaut de compacité, espaces de Besov.

(h_n) is a sequence of positive numbers, and (v_n) is a sequence of points in $\mathbb{H}^d$.
We recall that, in the Euclidean case $\mathbb{R}^d$, we have

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d), \quad \text{where} \quad 0 < s < d/2 \quad \text{and} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{d}. \tag{0.1}$$

As can be seen easily, the L^p and $\dot{H}^s$ norms are preserved under the translations τ_y and the dilations δ_h defined by

$$\tau_y u(x) = u(x-y);\ y \in \mathbb{R}^d$$

and

$$\delta_h u(x) = h^{-d/p} u(\frac{x}{h});\ h > 0.$$

Hence, the injection (0.1) is not compact. In [7], the author established that translations and dilations are the only responsible of this defect of compactness. The main goal of this paper is to prove that the procedure used in [7] can be generalized for the Heisenbeg group. Before going any farther, we should recall some notations (see [3] for more details and complements).
The Heisenberg group $\mathbb{H}^d$ is the set

$$\mathbb{C}^d \times \mathbb{R} = \{[z,t];\ z \in \mathbb{C}^d, t \in \mathbb{R}\},$$

endowed with the multiplication defined as follows

$$[z;t].[z';t'] = [z+z';t+t'+2Im(z\,\bar{z'})].$$

Thus $\mathbb{H}^d$ is not an abelian group. The homogeneous dilation is defined for any $a > 0$,

$$\delta_a[z;t] = [az;a^2t].$$

So the homogeneous dimension of $\mathbb{H}^d$ is $N = 2d+2$.

To define the homogeneous Sobolev space on the Heisenberg group, we use the system of left-invariant vector fields on $\mathbb{H}^d$, that is for $1 \leq j \leq d$

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j\partial_t \quad ; \quad Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j\partial_t.$$

Thus $\dot{H}^1(\mathbb{H}^d)$ is the closure of $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d+1})$ for the norm :

$$\|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{H}^d)} = \Big[\sum_{j=1}^{d} \|X_jf\|^2_{L^2} + \|Y_jf\|^2_{L^2}\Big]^{1/2}.$$

We introduce also the Laplace-Kohn operator

$$\Delta_{\mathbb{H}^d} = \sum_{j=1}^{d}(X_j^2 + Y_j^2).$$

To define the Fourier transform on $\mathbb{H}^d$, we will use the Bargmann representation described as follows. For any real number $\lambda \neq 0$, we denote by $\mathcal{H}_\lambda$ the Bargmann space

$$\mathcal{H}_\lambda = \{F; \text{holomorphic on}\, \mathbb{C}^d,\ ||F||_{\mathcal{H}_\lambda} < \infty\},$$

where,

$$||F||^2_{\mathcal{H}_\lambda} := \left(\frac{2|\lambda|}{\pi}\right)^d \int_{\mathbb{C}^d} e^{-2|\lambda||\xi|^2} |F(\xi)|^2 d\xi,$$

and u^λ the application from $\mathbb{H}^d$ to the unitary operators group of $\mathcal{H}_\lambda$ defined by

$$u^\lambda_{z,s} F(\xi) = F(\xi - \bar{z}) e^{i\lambda s + 2\lambda(\xi.z - |z|^2/2)}, \quad \text{if } \lambda > 0;$$

$$u^\lambda_{z,s} F(\xi) = F(\xi + z) e^{i\lambda s + 2\lambda(\xi.\bar{z} - |z|^2/2)}, \quad \text{if } \lambda < 0.$$

We recall that the family of functions $F_{\alpha,\lambda}(\xi) = \frac{(\sqrt{2|\lambda|}\xi)^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}$, where α belongs to $\mathbb{N}^d$, is a Hilbertian basis of $\mathcal{H}_\lambda$.

For $f \in L^1(\mathbb{H}^d)$, we defined the Fourier transform by

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{H}^d} f(w) u^\lambda_w dw.$$

It satisfies the classical formula

$$\mathcal{F}(-\Delta_{\mathbb{H}^d} f)(\lambda) F_{\alpha,\lambda} = 4|\lambda|(2|\alpha| + d)\mathcal{F}(f)(\lambda) F_{\alpha,\lambda},$$

which allows to define the homogeneous Sobolev spaces $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$

$$\dot{H}^s(\mathbb{H}^d) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d+1}); (-\Delta_{\mathbb{H}^d})^{\frac{s}{2}} u \in L^2\}.$$

According to the Sobolev inequality, one verifies that both the L^p and $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ are invariant by $\tau^{(g)}_w$ the translations to the left and σ_h the dilation. This generates some compactness defect for the Sobolev embedding $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{H}^d)$. That is : if u is any nonzero element of $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$, then for any sequence $(w_n)_n$ of $\mathbb{H}^d$ going to infinity, and for any sequence $(h_n)_n$ of positive real numbers going to zero or infinity, the sequences $(\tau^{(g)}_{w_n} u)_n$ and $(\sigma_{h_n} u)_n$ converge weakly to zero in $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$. Then, they cannot be relatively compact in $L^p(\mathbb{H}^d)$. In this work, our aim is to study this defect of compactness and to give some applications.
To state our main result, we need some definitions. We call a scaling any sequence $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of positive real numbers. We call core any sequence $\mathbf{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{H}^d$. For any scalings $\mathbf{h}$ and $\tilde{\mathbf{h}}$; any cores $\mathbf{v}$ and $\tilde{\mathbf{v}}$; $(\mathbf{h}, \mathbf{v})$ and $(\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{v}})$ are said to be strange if

$$|\log(\frac{\tilde{h}_n}{h_n})| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty \text{ or } \Big(\mathbf{h} = \tilde{\mathbf{h}} \text{ and } |\delta_{h_n^{-1}}(v_n^{-1}.\tilde{v}_n)| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty\Big). \tag{0.2}$$

Now, we give the principal result.

Theorem 0.1. *For any bounded sequence $(u_n)_n \subset \dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$, there exists a subsequence $(u'_n)_n$ of $(u_n)_n$, a scaling sequence $(\mathbf{h}^{(j)})_{j\geq 1}$, a core sequence $(\mathbf{v}^{(j)})_{j\geq 1}$, and a sequence $(\psi_j)_{j\geq 1}$ in $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ such that the couples $(\mathbf{h}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)})$ are pairwise strange, and for any integer $l \geq 1$,*

$$u'_n(v) = \sum_{j=1}^{l} (\frac{1}{h_n^{(j)}})^{\frac{N}{p}} \psi_j\Big(\delta_{(h_n^{(j)})^{-1}}((v_n^{(j)})^{-1}.v)\Big) + r_n^{(l)}(v),$$

$$\|u'_n\|^2_{\dot H^s(\mathbb{H}^d)} = \sum_{j=1}^{l} \|\psi_j\|^2_{\dot H^s(\mathbb{H}^d)} + \|r_n^{(l)}\|^2_{\dot H^s(\mathbb{H}^d)} + \circ(1), \quad (n \to +\infty),$$

where

$$\limsup_{n\to+\infty} \|r_n^{(l)}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \xrightarrow[l\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

The proof follows [7]. It is done in two steps. In the first one, we prove a general result about the structure of L^2-bounded sequences and the associated scaling. In the second one, the above general result is applied to the sequence $(\Lambda^s u_n)_n$ and we prove a refined Sobolev inequality which allows, by the use of Métivier-Schochet method (see [11]), to infer the result. The proof uses in crucial way Besov spaces.
At the end of this paper, we give two applications. The first is about the best Sobolev constant. The second deals with the description of bounded energy sequences of solutions to the wave equation

$$\partial_t^2 u - \Delta_{\mathbb{H}^d} u = 0.$$

1 Introduction

Dans [3] est démontrée l'injection de Sobolev sur le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^d$

$$\dot H^s(\mathbb{H}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{H}^d), \tag{1.3}$$

avec $d \in \mathbb{N}^*$, $0 < s < d+1$ et p est donné par $\frac{1}{2} - \frac{s}{2d+2} = \frac{1}{p}$.
Le but de ce travail est de caractériser le défaut de compacité de cette injection. Rappelons que dans le cas euclidien $\mathbb{R}^d$, nous avons

$$\dot H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d), \text{ avec } \frac{1}{2} - \frac{s}{d} = \frac{1}{p}, 0 < s < \frac{d}{2}. \tag{1.4}$$

Notons que les normes L^p et $\dot H^s$ sont invariantes par les translations τ_y et les dilatations δ_h définies par

$$\tau_y u(x) = u(x-y), \quad y \in \mathbb{R}^d \quad ; \quad \delta_h u(x) = \frac{1}{h^{\frac{d}{p}}} u(\frac{x}{h}), \quad h > 0.$$

Ces invariances induisent des défauts de compacité de (1.4). Dans [7], P. Gérard a montré que ces invariances sont les seuls responsables du défaut de compacité de (1.4). Notre propos est ici de montrer que la méthode décrite par P. Gérard dans [7] peut être généralisée au cas du groupe de Heisenberg. Il nous faut tout d'abord rappeler quelques notations. Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^d$ est l'ensemble

$$\mathbb{C}^d \times \mathbb{R} = \{[z;t]; z \in \mathbb{C}^d, t \in \mathbb{R}\}$$

muni de la loi de multiplication

$$[z;t].[z';t'] = [z+z'; t+t' + 2Im(z\,\bar{z'})].$$

Ainsi $\mathbb{H}^d$ est un groupe non commutatif dont l'identité est l'origine $[0;0]$; l'inverse de $[z,t]$ est donné par $[-z;-t]$. On a un système de champs de vecteurs invariants à gauche sur le groupe $\mathbb{H}^d$:

$$Z_j = \partial_{z_j} + i\bar{z}_j\partial_t \quad ; \quad \bar{Z}_j = \partial_{\bar{z}_j} - iz_j\partial_t \quad ; \quad j = 1, ..., d.$$

En utilisant le système de coordonnées réelles (x, y, t) obtenu à partir de $z_j = x_j + iy_j$, on a un autre système de générateurs, formé de champs réels :

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j\partial_t \quad ; \quad Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j\partial_t \quad ; \quad j = 1, ..., d.$$

Sur $\mathbb{H}^d$, la dilatation homogène est définie par ; pour $a > 0$

$$\delta_a[z;t] = [az;\ a^2t],$$

donc la dimension homogène de $\mathbb{H}^d$ est $N = 2d + 2$. On munit $\mathbb{H}^d$ de la mesure de Haar $d\omega = dxdydt$ et on désigne par $\dot{H}^1(\mathbb{H}^d)$ la complétion de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d+1})$ pour la norme

$$\|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{H}^d)} = \Big[\sum_{j=1}^{d}(\|X_jf\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + \|Y_jf\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)})\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

On introduit également l'opérateur Laplacien-Kohn

$$\Delta_{\mathbb{H}^d} = \sum_{j=1}^{d}(X_j^2 + Y_j^2) = 2\sum_{j=1}^{d}(Z_j\ \bar{Z}_j + \bar{Z}_j\ Z_j).$$

Décrivons brièvement quelques notions qui nous seront utiles dans la suite. On adoptera la représenttation de Bargmann décrite par $(u^\lambda, \mathcal{H}_\lambda), \lambda \neq 0$ où les $\mathcal{H}_\lambda$ sont les espaces de Bargmann définis par

$$\mathcal{H}_\lambda = \{F; \text{holomorphe sur}\,\mathbb{C}^d,\ ||F||_{\mathcal{H}_\lambda} < \infty\}$$

avec

$$||F||^2_{\mathcal{H}_\lambda} = \left(\frac{2|\lambda|}{\pi}\right)^d \int_{\mathbb{C}^d} e^{-2|\lambda||\xi|^2}|F(\xi)|^2 d\xi,$$

et u^λ est une application de $\mathbb{H}^d$ dans le groupe des opérateurs unitaires de $\mathcal{H}_\lambda$ donnée par

$$u^\lambda_{z,s}F(\xi) = F(\xi - \bar{z})e^{i\lambda s + 2\lambda(\xi.z - |z|^2/2)}, \qquad \text{si } \lambda > 0;$$

$$u^\lambda_{z,s}F(\xi) = F(\xi + z)e^{i\lambda s + 2\lambda(\xi.\bar{z} - |z|^2/2)}, \qquad \text{si } \lambda < 0.$$

On rappelle que les monômes $F_{\alpha,\lambda}(\xi) = \frac{(\sqrt{2|\lambda|}\xi)^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ forment une base hilbertienne de $\mathcal{H}_\lambda$ et que la famille $(u^\lambda)_{\lambda\neq 0}$ donne toute les représentations irréductibles unitaires de $\mathbb{H}^d$.

La transformation de Fourier introduite ici est donnée pour toute f dans $L^1(\mathbb{H}^d)$ par

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \hat{f}\,(\lambda) = \int_{\mathbb{H}^d} f(w)u^\lambda_w dw.$$

Elle vérifie la formule fondamentale suivante

$$\mathcal{F}(-\Delta_{\mathbb{H}^d}f)(\lambda)F_{\alpha,\lambda}=4|\lambda|(2|\alpha|+d)\mathcal{F}(f)(\lambda)F_{\alpha,\lambda},$$

qui nous permet de définir les puissances fractionnaires de $-\Delta_{\mathbb{H}^d}$. Ainsi, les espaces de Sobolev homogènes $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ seront définis pour tout s dans $\mathbb{R}$ comme suit

$$\dot{H}^s(\mathbb{H}^d):=\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d+1});(-\Delta_{\mathbb{H}^d})^{\frac{s}{2}}u\in L^2\}.$$

L'inégalité de Sobolev est donnée pour $s\in]0,\frac{N}{2}[$, $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{s}{N}$ par

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}\leq c\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)}.$$

On vérifie alors aisément que les normes de $L^p(\mathbb{H}^d)$ et de $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ sont invariantes par les translations à gauche $\tau_\omega^{(g)}$ et les dilatations σ_h définies par

$$(IL)\begin{cases}\tau_\omega^{(g)}u(v) &= u(\omega^{-1}.v),\quad \omega\in\mathbb{H}^d,\\ \sigma_h u(v) &= h^{-\frac{N}{p}}u(\delta_{h^{-1}}v),\quad h>0.\end{cases}$$

Ces invariances induisent des défauts de compacité pour l'injection de $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ dans $L^p(\ \mathbb{H}^d)$: si u est un élément non nul de $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$, pour toute suite $(\omega_n)_n$ de points de $\mathbb{H}^d$ tendant vers l'infini, pour toute suite $(h_n)_n$ de réels positifs tendant vers 0 ou $+\infty$, les suites $(\tau_{\omega_n}^{(g)}u)_n$, $(\sigma_{h_n}u)_n$ convergent faiblement vers 0 dans $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ donc ne sont pas relativement compactes dans $L^p(\mathbb{H}^d)$. L'objet de ce travail est d'étudier dans quelle mesure ces invariances sont les seules responsables du défaut de compacité de l'injection de Sobolev $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)\hookrightarrow L^p(\mathbb{H}^d)$ et de donner quelques applications. Afin d'énoncer le résultat principal, on introduit un peu de vocabulaire. On appellera échelle toute suite $\mathbf{h}=(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et cœur (de concentration) toute suite $\mathbf{v}=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{H}^d$. Etant données deux échelles $\mathbf{h}$, $\tilde{\mathbf{h}}$ et deux cœurs $\mathbf{v}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, on dira que les couples $(\mathbf{h},\mathbf{v})$ et $(\tilde{\mathbf{h}},\tilde{\mathbf{v}})$ sont étrangers si

$$|\log(\frac{\tilde{h}_n}{h_n})|\ \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\ +\infty \text{ ou } \Big(\mathbf{h}=\tilde{\mathbf{h}} \text{ et } |\delta_{h_n^{-1}}(v_n^{-1}.\tilde{v}_n)|\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}+\infty\Big). \tag{1.5}$$

Le but de cet article est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Pour toute suite bornée $(u_n)_n$ de $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$, il existe une sous-suite $(u'_n)_n$ de $(u_n)_n$, une suite $(\mathbf{h}^{(j)})_{j\geq1}$ d'échelles, une suite $(\mathbf{v}^{(j)})_{j\geq1}$ de cœurs et une suite $(\psi_j)_{j\geq1}$ de $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ tels que les couples $(\mathbf{h}^{(j)},\mathbf{v}^{(j)})$ soient deux à deux étrangers et, pour tout entier $l\geq1$,*

$$u'_n(v)=\sum_{j=1}^{l}(\frac{1}{h_n^{(j)}})^{\frac{N}{p}}\psi_j\Big(\delta_{(h_n^{(j)})^{-1}}((v_n^{(j)})^{-1}.v)\Big)+r_n^{(l)}(v), \tag{1.6}$$

$$\|u'_n\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)}=\sum_{j=1}^{l}\|\psi_j\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)}+\|r_n^{(l)}\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)}+\circ(1),\quad(n\to+\infty), \tag{1.7}$$

avec

$$\limsup_{n\to+\infty}\|r_n^{(l)}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)}\ \xrightarrow[l\longrightarrow+\infty]{}\ 0. \tag{1.8}$$

Remarques 1.1. a) *Soient* $\mathbf{h}$ *et* $\tilde{\mathbf{h}}$ *deux échelles et* $\mathbf{v}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ *deux cœurs tels que* $(\mathbf{h},\mathbf{v})$ *et* $(\tilde{\mathbf{h}},\tilde{\mathbf{v}})$ *soient étrangers (voir (1.5)). Alors si* $f \in L^a(\mathbb{H}^d), g \in L^b(\mathbb{H}^d)$ *avec* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$, $1<a,b<+\infty$, *on vérifie que*

$$\int_{\mathbb{H}^d}(\frac{1}{h_n})^{\frac{N}{a}} f(\delta_{h_n^{-1}}(v_n{}^{-1}.v))(\frac{1}{\tilde{h}_n})^{\frac{N}{b}} g(\delta_{\tilde{h}_n^{-1}}(\tilde{v}_n^{-1}.v))dv \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0. \tag{1.9}$$

on en déduit que dans les conditions du théorème 1.1

$$\|u'_n\|^p_{L^p(\mathbb{H}^d)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \sum_{j=1}^{+\infty}\|\psi_j\|^p_{L^p(\mathbb{H}^d)}. \tag{1.10}$$

Par ailleurs, l'inégalité (1.7) entraîne

$$\limsup_{n\to+\infty}\|u'_n\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)} \geq \sum_{j=1}^{+\infty}\|\psi_j\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)}.$$

b) *On a la généralisation suivante de (1.10)*

$$\int_{\mathbb{H}^d}\varphi(v)|u'_n(v)|^p dv = \sum_{j=1}^{+\infty}(\frac{1}{h_n^{(j)}})^N\int_{\mathbb{H}^d}\varphi(v)|\psi_j(\delta_{(h_n^{(j)})^{-1}}((v_n^{(j)})^{-1}.v))|^p dv + \circ(1), (n\to+\infty). \tag{1.11}$$

pour toute fonction $\varphi \in L^\infty(\mathbb{H}^d)$. *Supposons alors que* (u_n)*vérifie, en plus des hypothèses du théorème,*

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{|v|>R}|u'_n(v)|^p dv \xrightarrow[R\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Alors, en utilisant (1.11) avec $\varphi(v)=\mathbf{1}_{|v|>R}$, *on constate que les suites* $\mathbf{h}^{(j)}$ *et* $\mathbf{v}^{(j)}$ *sont nécessairement bornées (si* $\psi_j\neq 0$*), donc quitte à extraire une sous-suite et à modifier* ψ_1, *la propriété (1.6) devient*

$$u'_n(v)=\psi_1(v)+\sum_{j=2}^{l}(\frac{1}{h_n^{(j)}})^{\frac{N}{p}}\psi_j\Big(\delta_{(h_n^{(j)})^{-1}}((v_n^{(j)})^{-1}.v)\Big)+r_n^{(l)}(v),$$

avec

$$\limsup_{n\to+\infty}\|r_n^{(l)}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \xrightarrow[l\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

et, pour $j\geq 2$

$$h_n^{(j)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0, \quad v_n^{(j)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} v^{(j)}\in\mathbb{H}^d.$$

Indiquons maintenant le plan de cet article. Dans le premier paragraphe on rappelle la définition des espaces de Besov sur le groupe de Heisenberg ainsi que les fonctions radiales et le découpage dyadique (voir [1, 3]). Le deuxième paragraphe est consacré à la démonstration du Théorème 1.1 : cette démonstration est inspirée de [7] et est constituée de deux étapes ; dans la première, on montre un résultat général sur la structure des suites bornées de L^2 et sur les échelles qui leur sont associées ; dans la deuxième étape, on applique ce résultat à la suite $(\Lambda^s u_n)$ et on montre une inégalité de Sobolev raffinée qui via la méthode de Métivier-Schochet (voir [11]), nous permettra de déduire le résultat. Dans le dernier paragraphe on donne deux applications du Théorème 1.1.

2 Espaces de Besov sur le groupe de Heisenberg

Dans cette section, on rappelle le découpage dyadique sur le groupe de Heisenberg qui sera utile pour définir les espaces de Besov. On renvoie à [3] pour les preuves détaillées ainsi que pour des compléments.

Le produit de convolution de deux fonctions f et g sur $\mathbb{H}^d$ est défini par

$$f * g(w) = \int_{\mathbb{H}^d} f(w.v^{-1})g(v)\, dv.$$

Comme dans le cas euclidien, on a la formule suivante

$$\mathcal{F}\,(f * g)\,(\lambda) = \mathcal{F}\,(f)\,(\lambda) \circ \mathcal{F}\,(g)\,(\lambda).$$

Pour introduire le découpage dyadique, on commence par étudier la transformée de Fourier des fonctions radiales sur le groupe de Heisenberg, i.e. des fonctions de la forme

$$f(z,s) = g(|z|,s).$$

Une telle fonction vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 2.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{H}^d)$ une fonction radiale.*
Alors

$$\hat{f}\,(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = R_{|\alpha|}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}$$

où

$$R_m(\lambda) = \begin{pmatrix} m+d-1 \\ m \end{pmatrix}^{-1} \int_{\mathbb{H}^d} f(z,s)\, e^{i\lambda s}\, L_m^{(d-1)}\left(2|\lambda||z|^2\right)\, e^{-|\lambda||z|^2}\, dzds,$$

sont des fonctions, et les $L_m^{(d-1)}$ étant les polynômes de Laguerre.
Réciproquement, s'il existe des scalaires $R_m(\lambda)$ vérifiant

$$\hat{f}\,(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = R_{|\alpha|}(\lambda)F_{\alpha,\lambda},$$

et

$$\sum_m \begin{pmatrix} m+d-1 \\ m \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} |R_m(\lambda)||\lambda|^d d\lambda < \infty,$$

alors on a presque partout

$$f(z,s) = \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \sum_m \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda s} R_m(\lambda)\, L_m^{(d-1)}\left(2|\lambda||z|^2\right)\, e^{-|\lambda||z|^2}|\lambda|^d\, d\lambda.$$

De cette proposition on déduit facilement le corollaire suivant.

Corollaire 2.1. *La transformation de Fourier réalise un isomorphisme de $L^2_{rad}(\mathbb{H}^d)$ dans $L^2_{poids}(\mathbb{N} \times \mathbb{R})$, où $L^2_{poids}(\mathbb{N} \times \mathbb{R})$ est défini par*

$$\|\{R_m(\lambda)\}\|^2_{poids} = \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \sum_m \begin{pmatrix} m+d-1 \\ m \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} |R_m(\lambda)|^2|\lambda|^d d\lambda.$$

Nous prenons maintenant une fonction particulière $R^* \in \mathcal{C}_0^\infty(C_0)$, où $C_0 = \{\tau \in \mathbb{R}; 1/2 \leq |\tau| \leq 4\}$ et définissons $R^*_m(\tau) = R^*((2m+d)\tau)$, donc $R^*_m \in \mathcal{C}_0^\infty(C_m)$ avec $C_m = \{\tau \in \mathbb{R}; 1/2\,(2m+d)^{-1} \leq |\tau| \leq 4\,(2m+d)^{-1}\}$. D'après [4, 5], on peut choisir R^* vérifiant,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} R^*_m(2^{-2j}\tau) = 1, \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N},\ \tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Il existe donc une fonction radiale φ sur $\mathbb{H}^d$ vérifiant

$$\overset{\wedge}{\varphi}(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = R^*_{|\alpha|}(\lambda)F_{\alpha,\lambda};$$

et

$$\varphi(z,s) = \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}} \sum_m \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda s} R^*_m(\lambda)\, L_m^{(d-1)}\left(2|\lambda||z|^2\right)\, e^{-|\lambda||z|^2}|\lambda|^d\, d\lambda.$$

Pour $j \in \mathbb{Z}$, posons

$$\varphi_j(z,s) = \varphi(2^j z, 2^{2j}s),$$

on a donc

$$\overset{\wedge}{\varphi}_j(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = R^j_{|\alpha|}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}$$

où

$$R^j_{|\alpha|}(\lambda) = R^*_{|\alpha|}(2^{-2j}\lambda).$$

Ce qui permet de définir une famille d'opérateurs $\Delta_j : L^2(\mathbb{H}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{H}^d)$, $j \in \mathbb{Z}$, par

$$\mathcal{F}(\dot{\Delta}_j f)(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = R^j_{|\alpha|}(\lambda)\mathcal{F}(f)(\lambda)F_{\alpha,\lambda}$$

qui vérifie

$$\dot{\Delta}_j f = f * \varphi_j.$$

En outre, on a la proposition suivante (voir [9]).

Proposition 2.2. *Pour toute fonction $Q \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^*_+)$, l'opérateur $Q(-\Delta_{\mathbb{H}^d})$ est la convolution avec une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$.*

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{H}^d)$, la décomposition de Littlewood-Paley de f est définie par

$$f = \sum_j \dot{\Delta}_j f.$$

Définition 2.1. *Soient $s \in \mathbb{R}$, et $1 \leq p, r \leq +\infty$ deux réels, avec $s < N/p$. L'espace de Besov homogène sur le groupe de Heisenberg $\dot{\mathbf{B}}^s_{p,r}(\mathbb{H}^d)$ est l'espace des distributions tempérées telles que $u = \sum_j \dot{\Delta}_j u$, et que la norme suivante soit finie*

$$\|u\|_{\dot{\mathbf{B}}^s_{p,r}(\mathbb{H}^d)} = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jrs}\|\dot{\Delta}_j u\|^r_{L^p(\mathbb{H}^d)}\Big)^{1/r},$$

avec la modification habituelle si $r = \infty$.

On a le résultat suivant démontré dans [3].

Proposition 2.3.
(i) $\mathcal{S}(\mathbb{H}^d) \subset \dot{\mathbf{B}}^s_{p,r}(\mathbb{H}^d)$, *pour* $s + N(1-\frac{1}{p}) > 0$.
(ii) $\dot{\mathbf{B}}^s_{p,r}(\mathbb{H}^d)$ *est un espace de Banach pour tout* $s < \frac{N}{p}$, $1 \leq p,\ r \leq +\infty$.
(iii) Si $|s| < \frac{N}{p}$, *le dual de* $\dot{\mathbf{B}}^s_{p,r}(\mathbb{H}^d)$ *est* $\dot{\mathbf{B}}^{-s}_{\overline{p},\overline{r}}(\mathbb{H}^d)$, *où* $\frac{1}{p} + \frac{1}{\overline{p}} = 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{\overline{r}} = 1$.
(iv) $\dot{\mathbf{B}}^s_{p,2}(\mathbb{H}^d) \subset L^a(\mathbb{H}^d)$ *si* $s \in [0, \frac{N}{p}[$, $\frac{1}{a} = \frac{1}{p} - \frac{s}{N}$ *(Injection de Sobolev).*

De plus cette injection a une forme précisée

$$\|u\|_{L^a(\mathbb{H}^d)} \leq c\|u\|^{1-\frac{p}{a}}_{\dot{\mathbf{B}}^{-(\frac{N}{2}-s)}_{\infty,\infty}(\mathbb{H}^d)} \|u\|^{\frac{p}{a}}_{\dot{\mathbf{B}}^s_{p,p}(\mathbb{H}^d)}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espace de Sobolev sur le groupe de Heisenberg $\dot{H}^k(\mathbb{H}^d)$ est la complétion de $\mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$ pour la norme

$$\|u\|^2_{\dot{H}^k(\mathbb{H}^d)} = \sum_{l\in\mathbb{N},\ j_1+...+j_l=k} \|T_{j_1}...T_{j_l}u\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)},$$

où $T_j = X_j$, $T_{d+j} = Y_j$, $j \in \{1, ..., d\}$, $j_i \in \{1, ..., 2d\}$.

On a

$$\begin{cases} u \in \dot{H}^k(\mathbb{H}^d) & \Leftrightarrow & (\Delta_{\mathbb{H}^d})^{\frac{k}{2}}u \in L^2(\mathbb{H}^d), \text{ si k est pair,} \\ u \in \dot{H}^k(\mathbb{H}^d) & \Leftrightarrow & (\Delta_{\mathbb{H}^d})^{\frac{k-1}{2}}u \in \dot{H}^1(\mathbb{H}^d), \text{ si k est impair,} \end{cases}$$

avec des normes équivalentes.
$\dot{H}^k(\mathbb{H}^d)$ est un espace de Hilbert pour tout $k \in \mathbb{N}$, et on a le lien suivant de cet espace avec celui de Besov (voir [3]). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k < \frac{N}{2}$, on a $\dot{\mathbf{B}}^k_{2,2}(\mathbb{H}^d) = \dot{H}^k(\mathbb{H}^d)$. Il suffit d'adapter la même preuve pour montrer que $\dot{\mathbf{B}}^s_{2,2}(\mathbb{H}^d) = \dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ et on a $\|.\|_{\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)}$ et $\|.\|_{\dot{B}^s_{2,2}(\mathbb{H}^d)}$ sont équivalentes.

3 Démonstration du Théorème 1.1

3.1 Extraction des échelles d'une suite bornée de $L^2(\mathbb{H}^d)$

On commence par introduire quelques définitions qui seront utiles pour la démonstration du théorème 1.1.

Définition 3.1. *On note* $\mathcal{S}_0(\mathbb{H}^d)$ *l'ensemble de fonctions* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$ *telles qu'il existe* $r > 0$, *verifiant :*

$$\begin{cases} u * f = 0 \quad , \text{ pour tout } f \in \mathcal{S}_{rad}(\mathbb{H}^d), \text{ vérifiant pour tout } m \in \mathbb{N} \\ \qquad \hat{f}\,(m, \lambda) = 0 \ , \text{ pour tout } \quad \lambda \in (2m+d)^{-1}B(0, r). \end{cases}$$

En particulier $\mathcal{S}_0(\mathbb{H}^d)$ est dense dans $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ pour $|s| < \frac{N}{2}$. Cette définition géneralise le cas euclidien pour les fonctions à spectre loin de l'origine.

Définition 3.2. *Soit* $\mathbf{f} = (f_n)_n$ *une suite bornée de* $L^2(\mathbb{H}^d)$*, et soit* $\mathbf{h} = (h_n)_n$ *une échelle ;*
(i) *On dit que* $\mathbf{f}$ *est* $\mathbf{h}$*-oscillante si*

$$\limsup_{n\to+\infty}\Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}\int_{h_n^2(2|\alpha|+d)|\lambda|\leq\frac{1}{R}}\|\overset{\wedge}{f_n}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|^2_{\mathcal{H}_\lambda}|\lambda|^d d\lambda+$$

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}\int_{h_n^2(2|\alpha|+d)|\lambda|\geq R}\|\overset{\wedge}{f_n}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|^2_{\mathcal{H}_\lambda}|\lambda|^d d\lambda\Big)\xrightarrow[R\longrightarrow+\infty]{}0.$$

(ii) *On dit que* $\mathbf{f}$ *est étrangère à* $\mathbf{h}$ *si, pour tous réels* $b > a > 0$ *;*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}\int_{a\leq h_n^2(2|\alpha|+d)|\lambda|\leq b}\|\overset{\wedge}{f_n}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|^2_{\mathcal{H}_\lambda}|\lambda|^d d\lambda\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}0.$$

Définition 3.3. *La puissance fractionnaire de* $-\Delta_{\mathbb{H}^d}$ *notée* Λ^s *est l'opérateur défini pour tout* u *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$ *par*

$$\mathcal{F}(\Lambda^s u)F_{\alpha,\lambda} = \Big(4\mid\lambda\mid(2\mid\alpha\mid+d)\Big)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(u)(\lambda)F_{\alpha,\lambda}$$

où $s\in\mathbb{R}, \lambda\in\mathbb{R}^*$ *et* $\alpha\in\mathbb{N}^d$.

Remarques 3.1. a)*Etant donnée une échelle* $\mathbf{h}$*, les suites* $\mathbf{f}$ *qui sont à la fois* $\mathbf{h}$*-oscillantes et étrangères à* $\mathbf{h}$ *sont exactement celles qui tendent vers* 0 *pour la norme* $L^2(\mathbb{H}^d)$.
b) *Soit* $\mathbf{h}$ *une échelle, soient* $\mathbf{f}$ *une suite* $\mathbf{h}$*-oscillante et* $\mathbf{g}$ *une suite étrangère à* $\mathbf{h}$*. Alors la formule de Plancherel et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraînent*

$$\int_{\mathbb{H}^d} f_n(v)\bar{g}_n(v)dv\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}0,$$

on en déduit l'identité de presque orthogonalité

$$\|f_n+g_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} = \|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)}+\|g_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)}+\circ(1),\quad (n\to+\infty).$$

c) *Supposons donnée, pour tout* $n\in\mathbb{N}$*, une fonction* $\sigma_n\in L^\infty(\mathbb{R}_+)$*, de sorte que la suite* $(\|\sigma_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)})_{n\in\mathbb{N}}$ *soit bornée. Alors, si* $\mathbf{f}$ *est* $\mathbf{h}$*-oscillante (resp.étrangère à* $\mathbf{h}$*) la suite* $(\sigma_n(-\Delta_{\mathbb{H}^d})f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *l'est aussi.*
d) *Il existe des suites* $\mathbf{f}$ *étrangères à toute échelle, qui ne tendent pas vers* 0 *en norme* $L^2(\mathbb{H}^d)$*. Par exemple, soit* $R\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ *telle que* $R(0)\neq 0$*. On pose, pour tout* $n\geq 2$,

$$f_n = \mathcal{F}^{-1}((R_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}})$$

avec $((R_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}})$ *défini par*

$$\begin{cases} R_m^{(n)} & = & 0, \text{ pour } \quad m\geq 1,\\ R_0^{(n)}(\lambda) & = & (\frac{\pi^{d+1}}{2^{d-1}})^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(\log n)^{\frac{1}{2}}}\frac{R(\frac{\lambda}{n})}{|\lambda|^{\frac{d}{2}}(1+\lambda^2)^{\frac{1}{4}}},\end{cases}$$

par la formule de Plancherel, on obtient

$$\|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} = \|(R_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}}\|^2_{L^2_d(N\times\mathbb{R})} = \frac{1}{\log n}\int_{\mathbb{R}}\frac{|R(\frac{\lambda}{n})|^2}{(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}d\lambda\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}|R(0)|^2.$$

On a, pour toute échelle $\mathbf{h}$, *et pour tous* $0 < a < b$,

$$\begin{aligned}\int_{a\le h_n^2 d|\lambda|\le b} |R_0^{(n)}(\lambda)|^2|\lambda|^d d\lambda &= \frac{1}{\log n}\int_{a\le h_n^2 d|\lambda|\le b} \frac{|R(\frac{\lambda}{n})|^2}{(1+\lambda^2)^{\frac12}} d\lambda \\ &\le \frac{C}{\log n}\int_{a\le h_n^2 d|\lambda|\le b} \frac{1}{(1+\lambda^2)^{\frac12}} d\lambda \\ &\le \frac{C'}{\log n}\log(\frac{b}{a}) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Notons enfin que la particularité d'être étrangère à toute échelle se mesure à l'aide de la norme de l'espace de Besov

$$\mathbf{B} = \dot{\mathbf{B}}^0_{2,\infty}(\mathbb{H}^d).$$

En effet

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\mathbf{B}} &= \limsup_{n\to+\infty} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|\Delta_k f_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} \\ &= \sup_{(k_n)\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} \|\Delta_{k_n} f_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}.\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}\int_{\beta\le 2^{-2k}(2|\alpha|+d)|\lambda|\le\gamma} \|\stackrel{\wedge}{f_n}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|^2_{\mathcal{H}_\lambda}|\lambda|^d d\lambda \le \|\Delta_k f_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} \le$$

$$\frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}\int_{a\le 2^{-2k}(2|\alpha|+d)|\lambda|\le b} \|\stackrel{\wedge}{f_n}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|^2_{\mathcal{H}_\lambda}|\lambda|^d d\lambda, \tag{3.12}$$

pour $0 < a < \beta < \gamma < b$ convenables. On en déduit que $\|f_n\|_{\mathbf{B}}$ tend vers 0 si et seulement si $\mathbf{f}$ est étrangère à toute échelle.
La proposition suivante exprime une décomposition d'une suite arbitraire $\mathbf{f}$ par rapport à une échelle donnée $\mathbf{h}$.

Proposition 3.1. *Soient* $\mathbf{h}$ *une échelle,* $\mathbf{f}$ *une suite bornée de* $L^2(\mathbb{H}^d)$. *Il existe une suite* $\mathbf{g} = (g_n)_n$ *bornée dans* $L^2(\mathbb{H}^d)$ *et* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante telles que :*
(i) $(g_n)_n$ *soit* $(h_{\varphi(n)})_n$*-oscillante ;*
(ii) $(f_{\varphi(n)} - g_n)_n$ *soit étrangère à* $(h_{\varphi(n)})_n$.

Démonstration. On vérifie aisément que la preuve de [4, Proposition 2.5] s'adapte dans ce cadre, en considérant $L_n(R)$, défini pour $R > 1$ par,

$$L_n(R) = \frac{2^{d-1}}{\pi^{d+1}}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}\int_{\frac{1}{R}\le h_n^2(2|\alpha|+d)|\lambda|\le R} \|\stackrel{\wedge}{f_n}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|^2_{\mathcal{H}_\lambda}|\lambda|^d d\lambda$$

qui nous permet à l'aide du lemme de Helly et un raisonnement par récurrence de construire une suite des fonctions $g_n \in L^2(\mathbb{H}^d)$ par la formule suivante

$$\stackrel{\wedge}{g_n}(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = \mathbf{1}_{\{\frac{1}{n}\le h^2_{\varphi(n)}(2|\alpha|+d)|\lambda|\le n\}}\stackrel{\wedge}{f}_{\varphi(n)}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}$$

qui repond aux conditions de la proposition. ∎

Remarques 3.2. a) *Etant données une suite* $\mathbf{f}' = (f_{\varphi(n)})_n$ *et une échelle* $\mathbf{h}' = (h_{\varphi(n)})_n$, *une suite* $\mathbf{g} = (g_n)_n$ *vérifiant (i), (ii), est caractérisée modulo une suite de* $L^2(\mathbb{H}^d)$ *tendant vers* 0 *en norme. C'est une conséquence de la remarque 3.1.a). On appellera alors* $\mathbf{g}$ *une composante* $\mathbf{h}'$*-oscillante de la suite* $\mathbf{f}'$*. La proposition se paraphrase donc en disant que, à extraction près de sous-suites, toute suite bornée de* $L^2(\mathbb{H}^d)$ *admet une composante oscillante selon une échelle donnée. La démonstration ci-dessus montre que la composante* $\mathbf{h}'$*-oscillante* $\mathbf{g}$ *de* $\mathbf{f}'$ *peut être prise de la forme*

$$g_n = \sigma_n(-\Delta_{\mathbb{H}^d})f'_n, \text{ avec } \quad \sigma_n^2 = \sigma_n.$$

b) *Si* $\mathbf{f}$ *est étrangère à une échelle* $\mathbf{h}$ *et admettant une composante oscillante* $\mathbf{g}$ *selon une échelle* $\tilde{\mathbf{h}}$*, alors* $\mathbf{g}$ *est étrangère à* $\mathbf{h}$*. En effet, pour tous* $b > a > 0$*, posons* $\sigma_n(\tau) = \mathbf{1}_{\{a \le h_n^2 \tau \le b\}}$ *;* $(\tau \in \mathbb{R})$*. Alors la remarque 3.1.c) entraîne que la suite* $(\sigma_n(-\Delta_{\mathbb{H}^d})g_n)_n$ *est* $\tilde{\mathbf{h}}$*-oscillante tandis que* $(\sigma_n(-\Delta_{\mathbb{H}^d})(f_n - g_n))_n$ *est étrangère à* $\tilde{\mathbf{h}}$*. Il en résulte que* $(\sigma_n(-\Delta_{\mathbb{H}^d})g_n)_n$ *est une composante* $\tilde{\mathbf{h}}$*-oscillante de* $(\sigma_n(-\Delta_{\mathbb{H}^d})f_n)_n$*. Or* $\|(\sigma_n(-\Delta_{\mathbb{H}^d})f_n)_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}$ *tend vers* 0*. La remarque 3.2.a) entraîne donc que* $\|(\sigma_n(-\Delta_{\mathbb{H}^d})g_n)_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}$ *tend vers 0, et ceci pour tous* $b > a > 0$*. La suite* $\mathbf{g}$ *est donc étrangère à* $\mathbf{h}$*.*

Définition 3.4. *Deux échelles* $\mathbf{h}$ *et* $\tilde{\mathbf{h}}$ *sont dites orthogonales (on note* $\mathbf{h} \perp \tilde{\mathbf{h}}$*) si*

$$|\log(\frac{\tilde{h}_n}{h_n})| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Par exemple, il est facile de vérifier que si $\mathbf{f}$ est $\mathbf{h}$-oscillante, alors $\mathbf{f}$ est étrangère à toute échelle orthogonale à $\mathbf{h}$. Le lemme suivant fournit presque une réciproque de ce fait.

Lemme 3.1. *Soit* $\mathbf{g}$ *une suite* $\mathbf{h}$*-oscillante telle que* $\|g_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}$ *ait une limite inférieure* > 0*. On suppose que* $\mathbf{g}$ *est étrangère à* $\tilde{\mathbf{h}}$*. Alors* $\mathbf{h}$ *et* $\tilde{\mathbf{h}}$ *sont orthogonales.*

La démonstration se fait exactement comme dans [7].

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 3.1. *Soit* $\mathbf{f}$ *une suite bornée de* $L^2(\mathbb{H}^d)$*. Il existe une sous-suite* $\mathbf{f}'$ *de* $\mathbf{f}$*, une suite* $(\mathbf{h}^{(j)})_{j\ge1}$ *d'échelles et une suite* $(\mathbf{g}^{(j)})_{j\ge1}$ *de suites bornées de* $L^2(\mathbb{H}^d)$*, vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) si $j \neq k$, $\mathbf{h}^{(j)} \perp \mathbf{h}^{(k)}$*,*
(ii) pour tout j*,* $\mathbf{g}^{(j)}$ *est* $\mathbf{h}^{(j)}$*-oscillante,*
(iii) pour tout entier $l \ge 1$*, pour tout* $v \in \mathbb{H}^d$ *, on a*

$$f'_n(v) = \sum_{j=1}^{l} g_n^{(j)}(v) + r_n^{(l)}(v),$$

où $\mathbf{r}^{(l)}$ *est étrangère à tout* $\mathbf{h}^{(j)}$ *pour tout* $j \in \{1, ..., l\}$ *et*

$$\limsup_{n\to+\infty} \|r_n^{(l)}\|_{\mathbf{B}} \xrightarrow[l\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Démonstration. Elle est inspirée de la preuve de P. Gérard [7].
Pour toute suite bornée $\mathbf{f}$ et $L^2(\mathbb{H}^d)$, on pose

$$\delta(f) = \limsup_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\mathbf{B}}.$$

Par ailleurs, si $\mathbf{u} = (u_n)_n$ est une suite, une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ de $(u_n)_n$ est notée $\mathbf{u}_\varphi$.

Permière étape. On montre que, pour toute suite bornée $\mathbf{f}$ de $L^2(\mathbb{H}^d)$, il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et une échelle $\mathbf{h}$ telle que $\mathbf{f}_\varphi$ admette une composante $\mathbf{h}$-oscillante $\mathbf{g}$ vérifiant

$$\|g_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} C \geq \frac{\delta(\mathbf{f})}{2}. \tag{3.13}$$

En effet, si $\delta(\mathbf{f}) = 0$, il suffit de prendre pour φ l'identité , $\mathbf{h}$ quelconque et $\mathbf{g} = 0$. Sinon, il existe une suite extraite $\mathbf{f}'$ de $\mathbf{f}$ et une suite (k_n) d'élèments dans $\mathbb{Z}$ telles que

$$\|\Delta_{k_n} f'_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} C_1 \geq \frac{\delta(\mathbf{f})}{2}. \tag{3.14}$$

Posons alors $h_n = 2^{-k_n}$. Par la proposition 3.1, quitte à extraire une sous-suite de $\mathbf{f}'$ et de $\mathbf{h}$ on peut supposer que $\mathbf{f}'$ a une composante $\mathbf{h}$-oscillante, que nous noterons $\mathbf{g}$.

On peut de plus supposer que $\|g_n\|_{L^2}$ a une limite. Comme $(f'_n - g_n)_n$ est étrangère à $\mathbf{h}$, on a compte tenu de l'inégalité (3.12)

$$\lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} \geq \lim_{n\to+\infty} \|\Delta_{k_n} f'_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} \geq \frac{\delta(\mathbf{f})}{2}, \tag{3.15}$$

ce qui est l'inégalité (3.13) annoncée .

Deuxième étape. On montre par récurrence la propriété suivante. Il existe des applications $\varphi_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes $(j \geq 1)$, des échelles $\mathbf{h}^{(j)}$ et des suites $\mathbf{g}^{(j)}$ vérifiant
(i) Pour tout j, $\mathbf{g}^{(j)}$ est $\mathbf{h}^{(j)}$-oscillante.
(ii) Pour tout $l \geq 2$, les échelles $\mathbf{h}^{(l)}, \mathbf{h}^{(l-1)}_{\varphi_l}, \ldots.., \mathbf{h}^{(1)}_{\varphi_2\circ\ldots..\circ\varphi_l}$ sont deux à deux orthogonales.
(iii) Pour tout n, on a

$$f_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_l(n)} = \sum_{j=1}^{l-1} g^{(j)}_{\varphi_{j+1}\circ\ldots\circ\varphi_l(n)} + g^{(l)}_n + r^{(l)}_n, \tag{3.16}$$

où $\mathbf{r}^{(l)}$est étrangère à $\mathbf{h}^{(l)}, \mathbf{h}^{(l-1)}_{\varphi_l}, \ldots.., \mathbf{h}^{(1)}_{\varphi_2\circ\ldots..\circ\varphi_l}$ et, pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$,

$$\|g^{(j)}_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} C_j \geq \frac{\delta(\mathbf{r}^{(j-1)})}{2}, \tag{3.17}$$

avec la notation $\mathbf{r}^{(0)} = f$.

Troisième étape. On utilise le procédé d'extraction de Cantor en posant

$$F_n = f_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)};$$

$$G_n^{(j)} = g^{(j)}_{\varphi_{j+1} \circ \ldots \circ \varphi_n(n)}, \text{ si } \quad n > j; \quad G_n^{(j)} = 0, \text{ si } \quad n \leq j;$$
$$H_n^{(j)} = h^{(j)}_{\varphi_{j+1} \circ \ldots \circ \varphi_n(n)}, \text{ si } \quad n > j; \quad H_n^{(j)} = 1, \text{ si } \quad n \leq j.$$

Alors $\mathbf{G}^{(j)}$ est $\mathbf{H}^{(j)}$-oscillante, les échelles $\mathbf{H}^{(j)}$ sont deux à deux orthogonales et, pour tout l, on a, pour tout $n > l$,

$$F_n = \sum_{j=1}^{l} G_n^{(j)} + r^{(l)}_{\varphi_{l+1} \circ \ldots \circ \varphi_n(n)} = \sum_{j=1}^{l} G_n^{(j)} + R_n^{(l)}; \tag{3.18}$$

avec $\mathbf{R}^{(l)}$ étrangère à $\mathbf{H}^{(l)}, \mathbf{H}^{(l-1)}, ..., \mathbf{H}^{(1)}$, et, pour tout $j \in \{1, ..., l\}$,

$$\|G_n^{(j)}\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} \to C_j \geq \frac{1}{2}\delta(\mathbf{r}^{(j-1)}) \geq \frac{1}{2}\delta(\mathbf{R}^{(j-1)}). \tag{3.19}$$

Appliquons alors à (3.18) l'identité de presque orthogonalité fournie par la remarque 3.1.b). Il vient, compte tenu de (3.19),

$$\|F_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} \geq \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{l}\Big(\delta(\mathbf{R}^{(j-1)})\Big)^2 + \|R_n^{(l)}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + \circ(1), (n \to +\infty) \tag{3.20}$$

ce qui entraîne que la série de terme général $\delta(\mathbf{R}^{(j)})^2$ converge ; en particulier $\delta(\mathbf{R}^{(j)})^2$ tend vers 0.
Ceci achève la démonstration du théorème 3.1. ■

Remarques 3.3. (a) *On notera que les* $\mathbf{g}^j$ *fournies par le théorème 3.1 sont des composantes* $\mathbf{h}^{(j)}$*-oscillantes de* $\mathbf{f}'$*.*
b) *Compte tenu de la remarque 3.2.b), on peut donc prendre* $\mathbf{g}^{(j)}$ *de la forme*

$$g_n^{(j)} = \sigma_n^{(j)}(-\Delta_{\mathbb{H}^d}) f'_n.$$

3.2 Un raffinement de l'inégalité de Sobolev

Proposition 3.2. *Soient* $s \in]0, \frac{N}{2}[$*, et* $p \in \mathbb{R}$ *vérifiant*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{N}.$$

Il existe alors une constante $c > 0$ *telle que pour tout* $f \in \dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$

$$\|f\|_{\dot{B}^{-(\frac{N}{2}-s)}_{\infty,\infty}(\mathbb{H}^d)} \leq c\|\Lambda^s f\|_{\mathbf{B}}. \tag{3.21}$$

Démonstration. Soit $f \in \dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$. Pour $v \in \mathbb{H}^d$ et $j \in \mathbb{Z}$, on a

$$\Delta_j f(v) = f * \varphi_j(v) = f * \varphi_j * \tilde{\varphi}_j(v),$$

où $\tilde{\varphi}_j := \varphi_{j-1} + \varphi_j + \varphi_{j+1}$.
En utilisant l'inégalité de Young on obtient

$$|\Delta_j f(v)| \leq \|f * \varphi_j * \tilde{\varphi}_j\|_{L^\infty(\mathbb{H}^d)} \leq c\|f * \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}\|\tilde{\varphi}_j\|_{L^2(\mathbb{H}^d)},$$

et comme

$$\|\tilde{\varphi}_j\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} \leq c 2^{\frac{Nj}{2}},$$

il vient donc

$$2^{(s-\frac{N}{2})j}\|\Delta_j f\|_{L^\infty(\mathbb{H}^d)} \leq c 2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}. \tag{3.22}$$

Un calcul direct de $2^{2sj}\|\Delta_j f\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)}$ donne

$$\begin{aligned}
2^{2sj}\|\Delta_j f\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} &= 2^{2sj}\|\mathcal{F}(\Delta_j f)\|^2_{L^2} \\
&= 2^{2js}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\mathcal{F}(f*\varphi_j)(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|^2_{\mathcal{H}_\lambda}|\lambda|^d d\lambda \\
&= 2^{2js}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}\int_{-\infty}^{+\infty}|R^*_{|\alpha|}(2^{-2j}\lambda)|^2\|\stackrel{\wedge}{f}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|^2_{\mathcal{H}_\lambda}|\lambda|^d d\lambda \\
&= 2^{2js}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}\int_{-\infty}^{+\infty}|R^*((2|\alpha|+d)2^{-2j}\lambda)|^2\|\stackrel{\wedge}{f}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|^2_{\mathcal{H}_\lambda}|\lambda|^d d\lambda,
\end{aligned}$$

et comme le support de R^* est inclus dans la couronne $\{\frac{1}{2} \leq |\tau| \leq 4\}$, il vient alors

$$R^*((2|\alpha|+d)2^{-2j}\lambda) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq (2|\alpha|+d)2^{-2j}|\lambda| \leq 4.$$

D'où

$$\begin{aligned}
&2^{2sj}\|\Delta_j f\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} \leq \\
&c2^{2js}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}\int_{-\infty}^{+\infty}((2|\alpha|+d)2^{-2j}|\lambda|)^s|R^*((2|\alpha|+d)2^{-2j}\lambda)|^2\|\stackrel{\wedge}{f}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}\|^2_{\mathcal{H}_\lambda}|\lambda|^d d\lambda \\
&\leq c\|\Delta_j(\Lambda^s f)\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} \\
&\leq c\|\Lambda^s f\|^2_{\mathbf{B}}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

En utilisant (3.22) et (3.23) on obtient l'inegalité (3.21). ■

En combinant le résultat donné par la proposition 2.3 et (3.21) on obtient le résultat suivant, qui est utile dans la suite.

Proposition 3.3. *Soient $s \in]0, \frac{N}{2}[$, et $p \in \mathbb{R}$ vérifiant*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{N}.$$

Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in \dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \leq c\|\Lambda^s f\|^{\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{H}^d)}\|\Lambda^s f\|^{1-\frac{2}{p}}_{\mathbf{B}}.$$

Corollaire 3.1. *Soient* $s \in]0, \frac{N}{2}[$, *et* $p \in \mathbb{R}$ *vérifiant*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{N}.$$

Soit $(u_n)_n$ *une suite bornée dans* $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ *telle que*

$$\|\Lambda^s u_n\|_{\mathbf{B}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0,$$

alors

$$\|u_n\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

En combinant le théorème 3.1 et le corollaire 3.1, on obtient

Proposition 3.4. *Soit* $\mathbf{u} = (u_n)_n$ *une suite bornée de* $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$, $s \in]0, \frac{N}{2}[$. *Il existe une sous-suite* $\mathbf{u}'$ *de* $\mathbf{u}$, *une suite* $(\mathbf{h}^{(j)})_{j\geq 1}$ *d'échelles et une suite* $(\mathbf{V}^{(j)})_{j\geq 1}$ *de suites bornées de* $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$, *vérifiant les propriétés suivantes ;*
(i) *si* $j \neq k$, $\mathbf{h}^{(j)} \perp \mathbf{h}^{(k)}$,
(ii) *pour tout* j, $\mathbf{V}^{(j)}$ *est* $\mathbf{h}^{(j)}$*-oscillante,*
(iii) *pour tout entier* $l \geq 1$, *pour tout* $v \in \mathbb{H}^d$, *on a*

$$u'_n(v) = \sum_{j=1}^{l} V_n^{(j)}(v) + \varrho_n^{(l)}(v); \quad \limsup_{n\to+\infty} \|\varrho_n^{(l)}\|_{L^p} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0; \tag{3.24}$$

$$\|\Lambda^s u'_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} = \sum_{j=1}^{l} \|\Lambda^s V_n^{(j)}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + \|\Lambda^s \varrho_n^{(l)}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + \circ(1), (n \to +\infty). \tag{3.25}$$

Démonstration.
On applique le théorème 3.1 à la suite $\mathbf{f}$ définie par $f_n = \Lambda^s u_n$; compte tenu de la remarque 3.3.b), on a

$$g_n^{(j)} = \sigma_n^{(j)}(-\Delta_{\mathbb{H}^d}) f'_n = \Lambda^s V_n^{(j)},$$

où

$$V_n^{(j)} = \sigma_n^{(j)}(-\Delta_{\mathbb{H}^d}) u'_n.$$

Les propriétés (i) et (ii) sont alors les propriétés (i) et (ii) du théorème 3.1. Par ailleurs, pour tout $l \geq 1$, la fonction

$$\varrho_n^{(l)} = u'_n - \sum_{j=1}^{l} V_n^{(j)},$$

vérifie $\Lambda^s \varrho_n^{(l)} = r_n^{(j)}$, où $\mathbf{r}^{(l)}$ est donné par la propriété (iii) du théorème 3.1. L'identité (3.25) est donc l'identité de presque orthogonalité fournie par la remarque 3.1.b). Puisque $\limsup_{n\to+\infty} \|\Lambda^s \varrho_n^{(l)}\|_{\mathbf{B}}$ tend vers 0 quand l tend vers l'infini, le corollaire 3.1 entraîne (3.24). ∎

Remarques 3.4.
a) *Compte tenu du théorème 3.1 et de la démonstration ci-dessus, la suite* $(\Lambda^s \varrho_n^{(l)})_n$ *est étrangère à* $\mathbf{h}^{(j)}$ *pour* $1 \leq j \leq l$.
b) *En particulier, si les* $\mathbf{h}^{(j)}$ *sont bornées, quitte à modifier la suite* $\mathbf{u}'$, *on peut supposer qu'elles tendent vers 0 sauf peut-être* $\mathbf{h}^{(1)}$.

3.3 Détermination des cœurs et des profils de concentration

Dans ce qui suit, on désigne par $\mathbf{1}$ l'échelle dont tous les termes sont égaux à 1.

Proposition 3.5. *Soit $\mathbf{w} = (w_n)_n$ une suite bornée de $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ telle que la suite $(\Lambda^s w_n)_n$ soit $\mathbf{1}$-oscillante. Il existe une sous-suite $\mathbf{w}'$ de $\mathbf{w}$, une suite $(v^{(\alpha)})_{\alpha\geq 1}$ de cœurs et une suite $(\psi^{(\alpha)})_{j\geq 1}$ de $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ telles que,*
(i) si $\alpha \neq \beta$,

$$|(v_n^{(\beta)})^{-1}.v_n^{(\alpha)}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

(ii) Pour tout entier $A \geq 1$, pour tout $v \in \mathbb{H}^d$,

$$w'_n(v) = \sum_{j=1}^{A} \psi^{(\alpha)}((v_n^{(\alpha)})^{-1}.v) + R_n^{(A)}(v), \limsup_{n\to+\infty} \|R_n^{(A)}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0, \tag{3.26}$$

$$\|\Lambda^s w'_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} = \sum_{\alpha=1}^{A} \|\Lambda^s \psi^{(\alpha)}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + \|\Lambda^s R_n^{(A)}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + \circ(1), (n \to +\infty). \tag{3.27}$$

Démonstration. On désigne par $\mathcal{P}(\mathbf{w})$ l'ensemble des $\psi \in \dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$, tels qu'il existe une suite $\mathbf{v} = (v_n)_n \subset \mathbb{H}^d$ et une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante ; telles que pour toute fonction $\chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{H}^d)$;

$$\int_{\mathbb{H}^d} w_{\varphi(n)}(v_n.v) \bar{\chi}(v) dv \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_{\mathbb{H}^d} \psi(v) \bar{\chi}(v) dv. \tag{3.28}$$

On note

$$\gamma(\mathbf{w}) = \sup\{\|\Lambda^s \psi\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}; \quad \psi \in \mathcal{P}(\mathbf{w})\}. \tag{3.29}$$

Première étape. On reprend la méthode utilisée dans le cas classique par P. Gérard [7], basée sur la méthode d'exhaution de Métivier-Schochet [11] ; avec γ comme fonction d'erreur. Si $\gamma(\mathbf{w}) > 0$, soit $\psi \in \mathcal{P}(\mathbf{w})$ telle que $\|\Lambda^s \psi\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} \geq \frac{\gamma(\mathbf{w})}{2}$, et soient $\mathbf{w}_\varphi$ et $\mathbf{v}$ comme dans la formule (3.28). Alors la suite $\mathbf{R}$ définie par

$$R_n(v) = w_{\varphi(n)}(v) - \psi(v_n^{-1}.v), \tag{3.30}$$

est bornée dans $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$, $(\Lambda^s R_n)_n$ est $\mathbf{1}$-oscillante, et, pour tout $\chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{H}^d)$

$$\int_{\mathbb{H}^d} R_n(v_n.v) \bar{\chi}(v) dv \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0. \tag{3.31}$$

Il en résulte

$$\|\Lambda^s w'_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} = \|\Lambda^s \psi\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + \|\Lambda^s R_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + \circ(1), (n \to +\infty). \tag{3.32}$$

Plus généralement, supposons que, pour un entier $A \geq 1$, il existe une sous-suite $\mathbf{w}'$ de $\mathbf{w}$, des élements $\psi^{(\alpha)}, 1 \leq \alpha \leq A$, de $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$, des suites $v^{(\alpha)}$, $1 \leq \alpha \leq A$, des points de $\mathbb{H}^d$, tels que

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow \left(|(v_n^{(\beta)})^{-1}.v_n^{(\alpha)}| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty \right), \tag{3.33}$$

avec, pour tout entier $B \leq A$, pour tout $v \in \mathbb{H}^d$,

$$w'_n(v) = \sum_{\alpha=1}^{B} \psi^{(\alpha)}\Big((v_n^{(\alpha)})^{-1}.v\Big) + R_n^{(B)}(v), \tag{3.34}$$

$$\|\Lambda^s \psi^{(B)}\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} \geq \frac{\gamma(\mathbf{R}^{(B-1)})}{2}, \tag{3.35}$$

et pour tout $\chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{H}^d)$,

$$\int_{\mathbb{H}^d} R_n^{(B)}(v_n^{(\alpha)}.v)\ \bar{\chi}\ (v)dv \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad 1 \leq \alpha \leq B. \tag{3.36}$$

Supposons de plus que $\gamma(\mathbf{R}^{(B-1)}) > 0$. Alors le raisonnement ci-dessus appliqué à $\mathbf{R}^{(\mathbf{A})}$ permet de définir $\psi^{(A+1)} \in \dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante et $\mathbf{v}^{(A+1)}$ tels que

$$\|\Lambda^s \psi^{(A+1)}\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} \geq \frac{\gamma(\mathbf{R}^{(A)})}{2}, \tag{3.37}$$

et pour $\chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{H}^d)$,

$$\int_{\mathbb{H}^d} R_{\varphi(n)}^{(A)}(v_n^{(A+1)}.v)\ \bar{\chi}\ (v)dv \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{H}^d} \psi^{(A+1)}(v)\ \bar{\chi}\ (v)dv. \tag{3.38}$$

Puisque $\psi^{(A+1)}$ n'est pas nulle, la comparaison de (3.36) et (3.37) pour $B = A$ entraîne,

$$|(v_{\varphi(n)}^{(\alpha)})^{-1}.v_n^{(A+1)}| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty, \text{ pour } 1 \leq \alpha \leq A, \tag{3.39}$$

et donc

$$w'_{\varphi(n)}(v) = \sum_{\alpha=1}^{A} \psi^{(\alpha)}((v_n^{(\alpha)})^{-1}.v) + \psi^{(A+1)}((v_n^{(A+1)})^{-1}.v) + R_n^{(A+1)}(v), \tag{3.40}$$

où $\mathbf{R}^{(A+1)}$ vérifie, pour tout $\chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{H}^d)$,

$$\int_{\mathbb{H}^d} R_n^{(A+1)}(\tilde{v}_n^{(\alpha)}.v)\ \bar{\chi}\ (v)dv \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0\ ;\ 1 \leq \alpha \leq A+1, \tag{3.41}$$

avec $\tilde{v}_n^{(\alpha)} = v_{\varphi(n)}^{(\alpha)}$ si $\alpha \leq A$, $\tilde{v}_n^{(A+1)} = v_n^{(A+1)}$.

En combinant une récurrence et un argument d'extraction diagonale, comme dans la démonstration du théorème 3.1, on construit une sous-suite $\mathbf{w}'$de $\mathbf{w}$ et des suites $\psi^{(\alpha)}$, $\mathbf{v}^{(\alpha)}$ de profils et des cœurs telles que l'on ait (3.33), (3.34),(3.35) et (3.36) pour tout entier B. Alors les propriétés (3.33), (3.34) et (3.36) entraînent

$$\|\Lambda^s w'_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} = \sum_{\alpha=1}^{B} \|\Lambda^s \psi^{(\alpha)}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + \|\Lambda^s R_n^{(B)}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + \circ(1), (n \to +\infty), \tag{3.42}$$

donc la série de terme général $\|\Lambda^s \psi^{(\alpha)}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)}$ est convergente. Compte tenu de (3.35), on obtient

$$\gamma(\mathbf{R}^{(A)}) \xrightarrow[A\longrightarrow+\infty]{} 0. \tag{3.43}$$

Deuxième étape. Compte tenu de (3.42) et (3.43), il suffit de prouver l'estimation (à une sous-suite près),

$$\limsup_{n\to+\infty} \|w_n\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \leq c \limsup_{n\to+\infty} \|\Lambda^s w_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^{\frac{2}{p}} \gamma(\mathbf{w})^{1-\frac{2}{p}} \tag{3.44}$$

pour toute suite $\mathbf{w}$ bornée dans $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ telle que $(\Lambda^s w_n)_n$ soit $\mathbf{1}$-oscillante.
Supposons, dans un premier temps, qu'il existe $a > 0$ et $b > a$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\mathcal{L}) \begin{cases} w_n * f = 0, \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{S}_{rad}(\mathbb{H}^d), \text{ vérifiant} \\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \hat{f}(\lambda) F_{\alpha,\lambda} = 0, \forall \lambda \in (2|\alpha| + d)^{-1} C_0'', \end{cases}$$

où $C_0'' = \{\tau \in \mathbb{R}; a \leq |\tau| \leq b\}$. Alors $\mathbf{w}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{H}^d)$ et dans $L^\infty(\mathbb{H}^d)$, avec

$$\|w_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} \leq c \frac{1}{a^s} \|\Lambda^s w_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}, \tag{3.45}$$

$$\|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{H}^d)} \leq c(a,b) \|w_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)} \leq c'(a,b) \|\Lambda^s w_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}. \tag{3.46}$$

En effet ; soit $Q \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $Q \equiv 1$ près de $]a, b[$. D'après la proposition 2.2, il existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$ telle que

$$Q(-\Delta_{\mathbb{H}^d}) w_n = w_n * g$$

comme w_n est à spectre dans la couronne C_0'' on obtient

$$w_n = w_n * g$$

ce qui implique (3.45) et (3.46) en vertu de l'inégalité de Young.
Revenons à la recherche d'une majoration plus précise de $\limsup_{n\to+\infty} \|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{H}^d)}$ en utilisant $\gamma(\mathbf{w})$. Pour ce faire, on considère $\tilde{Q} = \{(Q(4(2m+d)|\lambda|))_{m\in\mathbb{N}}\}$ où Q est la fonction introduite ci-dessus ; il est clair que $\varrho = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{Q})$ est une fonction radiale de $\mathcal{S}_0(\mathbb{H}^d)$ telle que

$$w_n = w_n * \varrho.$$

On en déduit que

$$\forall \tilde{v} \in \mathbb{H}^d, w_n(\tilde{v}) = \int_{\mathbb{H}^d} w_n(\tilde{v}.v) \varrho(v^{-1}) dv. \tag{3.47}$$

Par ailleurs, comme

$$\limsup_{n\to+\infty} \|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{H}^d)} = \sup_{\mathbf{v}\in(\mathbb{H}^d)^\mathbb{N}} \limsup_{n\to+\infty} |w_n(v_n)|,$$

en appliquant (3.47) avec $\tilde{v} = v_n$, on obtient (à une sous-suite près)

$$\limsup_{n\to+\infty} \|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{H}^d)} \leq \sup\{|\int_{\mathbb{H}^d} \varrho(v^{-1})\psi(v) dv|, \psi \in \mathcal{P}(\mathbf{w})\} \leq C(a,b)\gamma(\mathbf{w}).$$

Comme

$$\|w_n\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \leq \|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{H}^d)}^{1-\frac{2}{p}} \|w_n\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}^{\frac{2}{p}}$$

on obtient (3.44) , avec une constante C qui dépend de a et b. Notons que, si la construction de la première étape respecte la localisation spectrale $(\mathcal{L})$, il en est de même pour les restes $\mathbf{R}^{(A)}$. La proposition 3.5 est ainsi démontrée sous l'hypothèse supplementaire $(\mathcal{L})$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\|w'_n\|^p_{L^p(\mathbb{H}^d)} = \sum_{\alpha=1}^{+\infty}\|\psi^{(\alpha)}\|^p_{L^p(\mathbb{H}^d)}.$$

Ce qui entraîne compte tenu de la remarque 1.1.b) et des equations (3.26), (3.27)

$$\limsup_{n\to+\infty}\|\Lambda^s w'_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} \geq \sum_{\alpha=1}^{+\infty}\|\Lambda^s\psi^{(\alpha)}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)}.$$

En appliquant l'inégalité de Sobolev à chaque $\psi^{(\alpha)}$, on obtient

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty}\|w'_n\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} &\leq c\,\limsup_{n\to+\infty}\|\Lambda^s w'_n\|^{\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{H}^d)}\sup_\alpha\|\Lambda^s\psi^{(\alpha)}\|^{1-\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{H}^d)}\\ &\leq c\,\limsup_{n\to+\infty}\|\Lambda^s w'_n\|^{\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{H}^d)}\gamma(\mathbf{w}')^{1-\frac{2}{p}},\end{aligned}$$

ce qui implique l'estimation (3.44), cette fois avec une constante independante de a et b.
Si maintenant la suite $(\Lambda^s w_n)_n$ est simplement **1**-oscillante, on obtient l'estimation (3.44) par un simple argument d'approximation. La proposition 3.5 est complètement démontrée. ∎

Remarque 3.1. *La démonstration ci-dessus fournit quelques propriétés supplémentaires de la suite* $\mathbf{R}^{(A)}$. *Plus précisément on a, pour tout* $\chi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{H}^d)$,

$$\int_{\mathbb{H}^d} R_n^{(A)}(v_n^{(\alpha)}.v)\;\bar{\chi}\;(v)dv \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0, \quad 1\leq\alpha\leq A,$$

et

$$\gamma(\mathbf{R}^{(A)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Fin de la démonstration du théorème 1.1. Etant donnée une suite bornée $\mathbf{u}=(u_n)_n$ de $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$. On obtient, par la proposition 3.4, une sous-suite $\mathbf{u}'$ de $\mathbf{u}$, une suite d'échelles $\mathbf{h}^{(j)}$ et des suites $\mathbf{V}^{(j)}$ bornées dans $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ $\mathbf{h}^{(j)}$-oscillantes. En considérant le changement d'échelle

$$w_n^{(j)}(v) = (h_n^{(j)})^{\frac{N}{p}}V_n^{(j)}(\delta_{h_n^{(j)}}v),$$

on se ramène au cas **1**-oscillant ce qui permet d'appliquer la proposition 3.5, et ainsi fournir une sous-suite $\mathbf{w}'^{(j)}$, une suite $(\mathbf{v}^{(j,\alpha)})_{\alpha\geq1}$ de cœurs de concentration et une suite $(\psi^{(j,\alpha)})_{\alpha\geq1}$ de profils dans $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$. La suite de la démonstration est semblable à celle du cas classique (voir [7]). Le résultat final s'obtient comme dans le cas classique par une extraction diagonale.

4 Applications

Dans ce paragraphe on donne deux applications du théorème 1.1 ; la première application consiste à montrer que la meilleure constante de Sobolev est atteinte et la seconde concerne l'équation des ondes sur le groupe de Heisenberg.

4.1 Constante de Sobolev

On rappelle que la constante de Sobolev est définie par

$$C(s,p) = \inf\{\|\Lambda^s u\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}, \|u\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} = 1\}.$$

Comme dans le cas classique, on a le résultat suivant.

Théorème 4.1. *Soit* $(s,p) \in \mathbb{R}^2$ *vérifiant*

$$0 < s < \frac{N}{2}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{s}{N} = \frac{1}{2}.$$

(i) La constante de Sobolev $C(s,p)$ *est atteinte.*
(ii) Il existe une fonction $u \in \dot{H}^1(\mathbb{H}^d)$*, à valeurs réelles, telle que* $\|u\|_{L^p} = 1$ *et* $C(p) := C(1,p) = \|\nabla u\|_{L^2}$*. De plus, u vérifie l'équation suivante*

$$\Delta_{\mathbb{H}^d} u + c|u|^{p-2}u = 0;\ \ c > 0.$$

Démonstration. Montrons (i). Soit $(u_n)_n$ une suite de $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\|_{L^p} = 1 \quad \text{et} \quad \|\Lambda^s u_n\|_{L^2} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} C(s,p).$$

En particulier $(u_n)_n$ est bornée dans $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$; donc d'après le théorème 1.1, il existe une sous-suite $(u'_n)_n$ une famille d'échelles $(h^{(j)})_{j\geq 1}$, une famille de concentrations $(v^{(j)})_{j\geq 1}$ et une suite de fonctions $(\psi_j)_{j\geq 1}$ de $\dot{H}^s(\mathbb{H}^d)$ telles que pour tout entier $l \geq 1$,

$$u'_n(v) = \sum_{j=1}^{l} (\frac{1}{h_n^{(j)}})^{\frac{N}{p}} \psi_j \Big(\delta_{(h_n^{(j)})^{-1}}((v_n^{(j)})^{-1}.v)\Big) + r_n^{(l)}(v),$$

$$\|\Lambda^s u'_n\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} = \sum_{j=1}^{l} \|\Lambda^s \psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + \|\Lambda^s r_n^{(l)}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + \circ(1), \quad (n \to +\infty),$$

avec

$$\limsup_{n\to+\infty} \|r_n^{(l)}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \xrightarrow[l \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

De plus on a en vertu de (1.10),

$$\|u'_n\|^p_{L^p(\mathbb{H}^d)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \sum_{j=1}^{\infty} \|\psi_j\|^p_{L^p(\mathbb{H}^d)} = 1$$

donc

$$\Big(C(s,p)\Big)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|\Lambda^s \psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + \lim_{l\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \|\Lambda^s r_n^{(l)}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)}.$$

Posons

$$a^2 = \lim_{l\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \|\Lambda^s r_n^{(l)}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)}, \quad a \geq 0.$$

On a pour tout $j \geq 1$,

$$\|\psi_j\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} C(s,p) \leq \|\Lambda^s \psi_j\|_{L^2(\mathbb{H}^d)},$$

donc
$$\Big(\sum_j \|\psi_j\|^2_{L^p(\mathbb{H}^d)}\Big)^{\frac{1}{2}} C(s,p) \leq \Big(\sum_j \|\Lambda^s \psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Or
$$\|\psi_j\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} \leq 1, \qquad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

En utilisant l'inégalité élémentaire $(1+\tau^2)^{\frac{1}{2}} \geq (1+\tau^p)^{\frac{1}{p}}$ pour tout $p \geq 2$ et $\tau \in \mathbb{R}_+$, on obtient
$$\Big(\sum_j \|\psi_j\|^p_{L^p(\mathbb{H}^d)}\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_j \|\psi_j\|^2_{L^p(\mathbb{H}^d)}\Big)^{\frac{1}{2}},$$
donc
$$\Big(\sum_j \|\psi_j\|^p_{L^p(\mathbb{H}^d)}\Big)^{\frac{1}{p}} C(s,p) \leq \Big(\sum_j \|\Lambda^s \psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$
Comme
$$C(s,p) = \Big(\sum_{j=1}^{+\infty} \|\Lambda^s \psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{H}^d)} + a^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$
alors $a = 0$, et par suite il existe un unique $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\psi_j = 0, \qquad \forall j \neq j_0.$$
Il vient alors que
$$u'_n(v) = (\frac{1}{h_n^{(j_0)}})^{\frac{N}{p}} \psi_{j_0}\Big(\delta_{(h_n^{(j_0)})^{-1}}((v_n^{(j_0)})^{-1}.v)\Big),$$
d'où $\|\psi_{j_0}\|_{L^p(\mathbb{H}^d)} = 1$ et $C(s,p) = \|\Lambda^s \psi_{j_0}\|_{L^2(\mathbb{H}^d)}$. Ainsi la fonction $u \overset{\text{déf}}{=} \psi_{j_0}$ répond à la question.

Pour (ii), montrons d'abord qu'on peut prendre u à valeurs réelles. Pour ce faire, considérons $u \in \dot{H}^1(\mathbb{H}^d)$, tel que $C(p) = \|\nabla u\|_{L^2}$ et $\|u\|_{L^p} = 1$. En posant $u_1 = \mathcal{R}e(u)$ et $u_2 = \mathcal{I}m(u)$, on a
$$\|\nabla u_k\|_{L^2} = C(p)\|u_k\|_{L^p}, \quad k = 1, 2.$$
En effet, si on suppose que $\|\nabla u_1\|_{L^2} > C(p)\|u_1\|_{L^p}$ ou $\|\nabla u_2\|_{L^2} > C(p)\|u_2\|_{L^p}$, on trouve que
$$\|\nabla u_1\|^2_{L^2} + \|\nabla u_2\|^2_{L^2} > \big(C(p)\big)^2\Big(\|u_1\|^2_{L^p} + \|u_2\|^2_{L^p}\Big).$$
Comme $C(p) = \|\nabla u\|_{L^2}$, on obtient
$$1 > \|u_1\|^2_{L^p} + \|u_2\|^2_{L^p} = \|u_1^2\|_{L^{\frac{p}{2}}} + \|u_2^2\|_{L^{\frac{p}{2}}}.$$
Or $1 = \|u\|^2_{L^p} = \||u|\|^2_{L^p} = \|u_1^2 + u_2^2\|_{L^{\frac{p}{2}}}$, donc $\|u_1^2 + u_2^2\|_{L^{\frac{p}{2}}} > \|u_1^2\|_{L^{\frac{p}{2}}} + \|u_2^2\|_{L^{\frac{p}{2}}}$, ce qui est impossible.

Soient $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{H}^d)$ et $v \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$ à valeurs réelles telles que $C(p) = \|\nabla u_0\|_{L^2}$ et $\|u_0\|_{L^p} = 1$, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que l'application
$$\theta : \varepsilon \to \frac{\|\nabla(u_0 + \varepsilon v)\|^p_{L^2}}{\|u_0 + \varepsilon v\|^p_{L^p}}$$

soit définie sur $]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[$ et réalise un minimum en 0. De plus, elle admet le développement limité

$$\theta(\varepsilon)=(C(p))^p+p\varepsilon\int\{(C(p))^{p-2}\nabla u_0.\nabla v-|u_0|^{p-2}u_0v\}+o(\varepsilon).$$

On en déduit alors que

$$\Delta_{\mathbb{H}^d}u_0+(C(p))^{p-2}|u_0|^{p-2}u_0=0.$$

4.2 Equation des ondes linéaire sur le groupe de Heisenberg

On va décrire dans ce paragraphe la structure générale des solutions de l'équation des ondes libre sur le groupe de Heisenberg, en s'inspirant de [2].
On rappelle que l'équation des ondes linéaire sur $\mathbb{H}^d$ s'écrit

$$(\mathcal{E})\qquad \partial_t^2u-\Delta_{\mathbb{H}^d}u=0,$$

et que si $(u(0),\partial_tu(0))=(\varphi,\psi)\in\dot{H}^1(\mathbb{H}^d)\times L^2(\mathbb{H}^d)$ alors $(\mathcal{E})$ admet une unique solution globale $u\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\dot{H}^1)\cap\mathcal{C}^1(\mathbb{R},L^2)$ vérifiant :

$$\begin{aligned}E(u(t)):&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{H}^d}\Big(|\nabla u(t,v)|^2+|\partial_tu(t,v)|^2\Big)dv\\&=E(u(0)),\end{aligned}$$

où $E(u(t))$ désigne l'énergie de u à l'instant t (pour plus des détails voir [3]).
Plus précisément étant donnée $(\varphi_n,\psi_n)_n\subset\dot{H}^1(\mathbb{H}^d)\times L^2(\mathbb{H}^d)$, telles que

$$(**)\left\{\begin{array}{c}\sup_n\displaystyle\int_{\mathbb{H}^d}\Big(|\nabla\varphi_n(v)|^2+|\psi_n(v)|^2\Big)dv<+\infty,\\ \limsup_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{|v|\geq R}\Big(|\nabla\varphi_n(v)|^2+|\psi_n(v)|^2\Big)dv\xrightarrow[R\longrightarrow+\infty]{}0.\end{array}\right.$$

On considère la suite de solutions du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{c}\partial_t^2u_n-\Delta_{\mathbb{H}^d}u_n=0\\ u_n(0)=\varphi_n\\ \partial_tu_n(0)=\psi_n.\end{array}\right.$$

Avant d'énoncer le résultat principal, introduisons quelques définitions.

Définition 4.1. *Une onde concentrée est un triplet $\mathcal{W}=\Big(V,\underline{\varepsilon},\underline{Z}\Big)$, où V est une solution de $(\mathcal{E})$, $\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_n)_n$ est une suite de nombres réels positifs tendant vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et $\underline{Z}=(Z_n)_n$ est une suite de points dans $\mathbb{R}_t\times\mathbb{H}^d_v$ telle que*
(i) $Z_n\longrightarrow Z$ lorsque $n\longrightarrow+\infty$.
(ii) Si $Z_n=(t_n,v_n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{H}^d$, alors l'une des possibilités suivantes est vraie :

- $\dfrac{t_n}{\varepsilon_n}\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}+\infty,$
- $\dfrac{t_n}{\varepsilon_n}\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}-\infty,$
- $\dfrac{t_n}{\varepsilon_n}\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}0.$

Définition 4.2. *Deux ondes concentrées* $\mathcal{W} = \Big(V, \underline{\varepsilon}, \underline{Z}\Big)$ *et* $\tilde{\mathcal{W}} = \Big(\tilde{V}, \underline{\tilde{\varepsilon}}, \underline{\tilde{Z}}\Big)$ *sont dites orthogonales si,*

$$|\log\Big(\frac{\tilde{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n}\Big)| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty \text{ ou } \Big(\underline{\tilde{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon} \text{ et } \frac{|t_n - \tilde{t}_n|}{\varepsilon_n} + |\delta_{\varepsilon_n^{-1}}(\tilde{v_n}^{-1}.v_n)| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0\Big).$$

A une onde concentrée $\mathcal{W} = \Big(V, \underline{\varepsilon}, \underline{Z}\Big)$, *on peut associer une suite des solutions de l'équation des ondes libre* $(\mathcal{E})$

$$u_n(t,v) = \frac{1}{\varepsilon_n^{\frac{N}{2}-1}}.V\Big(\frac{t-t_n}{\varepsilon_n}, \delta_{\varepsilon_n^{-1}}({v_n}^{-1}.v)\Big).$$

Définition 4.3. *Pour une suite des solutions* $\mathbf{u} = (u_n)_n$ *de l'équation* $(\mathcal{E})$ *on définit la fonction*

$$\tilde{\eta}(\mathbf{u}) = \sup\{E_0(V); \exists\varphi\ : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ \textit{strictement croissante et } (Z_n)_n \subset \mathbb{R}\times\mathbb{H}^d \textit{ telles que}$$
$$u_{\varphi(n)}(.+t_n, v_n.) \rightharpoonup V\}.$$

Théorème 4.2. *Soit* (φ_n), (ψ_n) *satisfaisant* $(**)$ *et* u_n *la solution de* $(\mathcal{E})$ *avec* $u_{n/_{t=0}} = \varphi_n$, $\partial_t u_{n/_{t=0}} = \psi_n$. *Alors il existe une sous-suite* $(u'_n)_n$ *de* $(u_n)_n$, u *une solution de* $(\mathcal{E})$ *d'énergie finie et une famille d'ondes concentrées* $\mathcal{W}^{(j)} = \Big(V^{(j)}, \underline{\varepsilon}^{(j)}, \underline{Z}^{(j)}\Big)$, $j \geq 1$, *telles que ; pour tout* $l \geq 1$, *on a*

$$u'_n(t,v) = u(t,v) + \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{(\varepsilon_n^{(j)})^{\frac{N}{2}-1}}.V^{(j)}\Big(\frac{t-t_n^{(j)}}{\varepsilon_n^{(j)}}, \delta_{(\varepsilon_n^{(j)})^{-1}}.({v_n^{(j)}}^{-1}v)\Big) + W_n^{(l)},$$

$$\tilde{\eta}(\mathbf{W}^{(l)}) \xrightarrow[l\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

$$E_0(u_n) = E_0(u) + \sum_{j=1}^{l} E_0(V^{(j)}) + E_0(W_n^{(l)}) + \circ(1), (n \longrightarrow +\infty).$$

Démonstration. La preuve est une adaptation de celle donnée dans [2] concernant le cas euclidien $\mathbb{R}^3$. Signalons toutefois une différence essentielle. Dans [2] les auteurs utilisent des estimation de Strichartz du type (voir [8])

$$\|u\|_{L_t^a(L_x^b)} \leq CE_0(u)^{1/2},$$

avec

$$(\mathcal{S}) \qquad \frac{1}{a} + \frac{3}{b} = \frac{1}{2}\,, \quad b < \infty.$$

La condition d'admissibilité $(\mathcal{S})$ autorise le choix $a = b = 8$ ce qui donne la petitesse du reste dans l'espace de Strichartz $L_t^5(L_x^{10})$.
Dans notre cas, les estimations de Strichartz disponibles sont (voir [3])

$$\|u\|_{L_t^a(L_x^b)} \leq CE_0(u)^{1/2},$$

avec

$$(\mathcal{S}') \qquad \frac{1}{a} + \frac{N}{b} = \frac{N}{2} - 1,\ \frac{2N}{N-2} \leq b \leq \frac{2(2N-1)}{2N-5}.$$

Il est aisé de voir que cette condition d'admissibilité ne permet pas le choix d'un couple $(a, b = a)$. ∎

Remerciements. L'auteur remercie vivement les Professeurs P. Gérard et C.-J. Xu pour les discussions fructueuses qu'il a eu avec eux. Il remercie également le referee anonyme pour ses diverses remarques pertinentes et constructives.

Références

[1] **H. Bahouri et I. Gallagher,** Paraproduit sur le groupe de Heisenberg, Rev. Mat. Iberoam, 17 (2001), 69-105.

[2] **H. Bahouri and P. Gérard,** High Frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, American Journal of Mathematics 121 (1999), 131-175.

[3] **H. Bahouri, P. Gérard et C.-J. Xu,** Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg, Journal d'Analyse Mathématiques, vol. 82 (2000), 93-118.

[4] **J.-M. Bony,** *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées parielles non linéaires*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 14 (1981), 209-246.

[5] **R. R. Coifman et Y. Meyer,** *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels* , Astérisque, 57 (1978).

[6] **D. Geller,** *Fourier analysis on the Heisenberg groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), 1328-1331.

[7] **P. Gérard,** *Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **3** (1998), 213-233 (electronic, **URL** : http ://www.emath.fr/cocv/).

[8] **J. Ginibre and G. Velo,** *Generalized Strichartz inequalities for the wave equations*, J. Funct. Anal. **133** (1995), 50-68.

[9] **A. Hulaniki,** *A functional calculus for Rocland operators on nilpotent Lie groups*, Studia Math. **78** (1984), 253-266.

[10] **S. Jaffard,** *Analysis of the Lack of Compactness in the Critical Sobolev Embeddings*, J. Funct. Anal. **161** (1999), 384-396.

[11] **G. Métivier and S. Schochet,** *Trilinear resonant interactions of semilinear hyperbolic waves*, Duke Math. J. Volume 95, Number 2 (1998), 241-304.

[12] **A.I. Nachman,** *The wave equation on the Heisenberg group*, Comm. Partial Differential Equations **7** (1982), 675-714.

[13] **E. M. Stein,** *Harmonic Analysis : Real-variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, 1993.

[14] **M. E. Taylor,** *Noncommutative Harmonic Analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, No.22, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

Faculté des Sciences de Bizerte, Département de Mathématiques,
Jarzouna 7021, Bizerte, Tunisie.
email : jamel.benameur@fsb.rnu.tn