ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 35, Number 4, Winter 1991

SOUS-GROUPES DENSES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

PAR E. MACIAS-VIRGÓS

0. Introduction

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. Un *réseau* de G est un sous-groupe discret Γ_0 qui est uniforme, c'est-à-dire tel que G/Γ_0 soit compact.

Un résultat bien connu de Mal'cev [Ma] établit que G possède un tel réseau si et seulement si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet des constantes de structure rationnelles par rapport à une certaine base; on dit alors que G est rationnel. Tout groupe abélien est rationnel; des exemples de groupes non rationnels sont donnés dans [Ma] et [Sch].

Le but de ce travail est d'examiner la situation suivante, qui apparaît, par exemple, dans l'étude des feuilletages transversalement de Lie à feuilles denses sur une variété compacte [Mo]:

QUESTION. Soit Γ un sous-groupe *dense* de G. Est-il toujours possible de trouver un réseau de G qui soit contenu dans Γ?

Lorsque G est rationnel il semblerait en principe possible de déformer n'importe quel réseau jusqu'à le rendre contenu dans le sous-groupe Γ fixé auparavant.

C'est par exemple ce qui se passe pour $\mathbf{R}^n$, où l'on sait qu'un sous-groupe discret est uniforme si et seulement s'il contient n vecteurs $\mathbf{R}$-linéairement indépendants; nous généralisons ce résultat à une classe plus large d'extensions centrales de $\mathbf{R}^2$ qui inclut en particulier le groupe d'Heisenberg $H_3 \subset SL(3, \mathbf{R})$.

Mais, de façon assez surprenante, le résultat n'est plus vrai en général même pour les extensions centrales de $\mathbf{R}^3$. En effet, au §3 nous montrons que dans le groupe de Lie H_5 des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & y_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Received January 29, 1990.

1980 Mathematics Subject Classification (1985 Revision). Primary 22E25; Secondary 58A12.

de SL(4, **R**), il existe un sous-groupe dense de type fini Γ, de rang $\Gamma = 18$, qui ne peut contenir aucun réseau de G.

Nous avons besoin pour cela du critère cohomologique suivant, dont la démonstration occupe le §2:

A tout groupe discret nilpotent, de type fini, sans torsion, on peut associer un groupe de Lie rationnel $M(\Gamma)$ dont Γ est un réseau; $M(\Gamma)$ est appelée la complétion réelle de Mal'cev de Γ.

Notons

$$\mathfrak{m}(i) \colon \mathfrak{m}(\Gamma) \to \mathfrak{g}$$

le morphisme d'algèbres de Lie associé à l'extension $M(i)\colon M(\Gamma) \to G$ de l'inclusion $i\colon \Gamma \subset G$. Si Γ contient un réseau de G, alors le morphisme induit en cohomologie

$$\mathfrak{m}(i)^* \colon H(\mathfrak{g}) \to H(\mathfrak{m}(\Gamma))$$

doit être injectif.

Si l'on essaie de trouver directement un exemple où $\mathfrak{m}(i)^*$ n'est pas injectif, un calcul direct semble hors de question. L'idée est alors de construire une extension intermédiaire N entre $M(\Gamma)$ et G, et de l'interpréter comme une classe dans $H^2(\mathfrak{g})$ qui est une obstruction à l'injectivité.

L'auteur veut remercier G. Hector et D. Tanré pour l'aide et l'intérêt qu'ils ont portés à ce travail, et le referee pour ses remarques.

1. Existence de réseaux

Soit G un groupe de Lie nilpotent 1-connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit Γ un sous-groupe *dense* de G.

Soit $G = G^0 \supset G^1 \supset \cdots \supset G^s \supset 1$ la suite centrale descendante définie par $G^{k+1} = [G, G^k]$; le degré de nilpotence de G est s; son centre $Z(G)$ vérifie $Z(G) \supset G^s$. La suite descendante de $\Gamma \subset G$ vérifiant $\Gamma^k \subset G^k$ pour tout k, Γ est nilpotent.

LEMME 1. *De la densité de* Γ *dans* G, *on déduit*:
(*a*) Γ *a même degré de nilpotence que* G *et son centre* $Z(\Gamma)$ *est* $Z(G) \cap \Gamma$.
(*b*) *Si* $Z(G) = G^s$ *alors* $Z(\Gamma)$ *est dense dans* $Z(G)$.

Remarque. Lorsque G^s est contenu strictement dans $Z(G)$, on n'a pas en général la densité de $Z(\Gamma)$ dans $Z(G)$; on peut construire un tel exemple dans le groupe d'Heisenberg généralisé $H_3 \times \mathbf{R}$.

Preuve. $[\Gamma, \Gamma]$ est dense dans $[G, G]$ par continuité de $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ (mais en général $[\Gamma, \Gamma]$ est strictement plus petit que $[G, G] \cap \Gamma$).

Le même raisonnement donne, par récurrence, la densité de Γ^k dans G^k pour tout k. En conséquence le degré de nilpotence de Γ doit encore être s; donc $Z(\Gamma) \supset \Gamma^s$.

On voit aussi facilement que $Z(G) \cap \Gamma = Z(\Gamma)$; en effet, si $\gamma_n h = h\gamma_n$ pour tout n alors $gh = hg$ pour $g = \lim \gamma_n$.

Finalement, si $G^s = Z(G)$ on a

$$\Gamma^s \subset Z(\Gamma) = Z(G) \cap \Gamma \subset Z(G) = G^s$$

et Γ^s est dense dans G^s, d'où la densité de $Z(\Gamma)$ dans $Z(G)$. Q.E.D.

PROPOSITION 2. *Si G est abélien, alors Γ contient un réseau de G.*

Preuve. G est isomorphe à $\mathbf{R}^n$. Comme Γ est dense, on peut choisir $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tels que $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ soit une $\mathbf{R}$-base de $\mathbf{R}^n$; le contraire signifierait que Γ est contenu dans un certain sous-espace vectoriel (fermé) de dimension strictement plus petite que n. Le groupe additif $\Gamma_0 \subset \Gamma$ engendré par les $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (à coefficients dans $\mathbf{Z}$) est un réseau de $\mathbf{R}^n$. Q.E.D.

Pour un groupe de Lie nilpotent 1-connexe quelconque G, il faut remplacer la notion d'indépendance linéaire par celle de *rang*:

Un sous-groupe Γ_0 de type fini est de rang r si l'on peut trouver un système de générateurs $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ tel que

$$\gamma_j \gamma_i \gamma_j^{-1} \in \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_i \rangle \quad \text{pour } j > i.$$

Γ_0 est alors un réseau de G si et seulement s'il est discret et de rang égal à $\dim G$ [Ra].

PROPOSITION 3. *Soit G un groupe de Lie nilpotent 1-connexe qui est une extension centrale de $\mathbf{R}^2$, et soit Γ un sous-groupe dense de G. Alors*:

(*a*) *Γ contient un sous-groupe Γ_0 de rang égal à* $\dim G$;

(*b*) *Si $Z(\Gamma)$ est dense dans $Z(G)$, alors Γ_0 est un réseau de G.*

Preuve. La suite exacte d'homotopie de l'extension

$$0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \mathbf{R}^2 \to 0$$

montre que le noyau $K \subset Z(G)$ est aussi 1-connexe, donc isomorphe à $\mathbf{R}^n$. En fait, si G n'est pas abélien on doit avoir $K = Z(G)$.

1. Γ étant dense dans G, $p(\Gamma)$ est dense dans $\mathbf{R}^2$ et doit contenir un certain réseau $\Gamma_0^+ \cong \mathbf{Z}^2$ engendré par x_1, x_2. Choisissons $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ tels que

$p(\gamma_i) = x_i$; il existe $z \in Z(\Gamma) = Z(G) \cap \Gamma$, qui ne dépend pas du choix des γ_i, pour lequel $\gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1} = z\gamma_1$.

2. Supposons d'abord $Z(\Gamma)$ dense dans $Z(G)$. On peut alors trouver une base $(z_1, \ldots, z_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que $i(z_j) \in \Gamma$ pour tout j. En plus, si $z \neq 1_G$ on peut supposer que $z = i(z_1)$; en effet, si $0 \neq z = \Sigma t_j z_j$, $t_j \in \mathbf{R}$, il existe par exemple $t_1 \neq 0$, donc $z_1 = 1/t_1(z - \Sigma_{j>1} t_j z_j)$, de façon que $(z, z_2, \ldots, z_n)$ soit toujours un système de $\mathbf{R}$-générateurs pour $\mathbf{R}^n$.

Le sous-groupe Γ_0 engendré par $(i(z_1), \ldots, i(z_n), \gamma_1, \gamma_2)$ a alors un rang égal à $n + 2 = \dim G$ et il est contenu dans Γ.

3. Γ_0 sera le réseau cherché dès qu'on aura prouvé qu'il est discret; puisqu'il est dénombrable il suffira de savoir qu'il est fermé. Or, si on a une suite

$$\{z_\nu \gamma_1^{a_\nu} \gamma_2^{b_\nu}\} \to g,$$

où z_ν est une combinaison à coefficients entiers des $z_1, \ldots, z_n$, on obtiendra par p une suite

$$\{a_\nu x_1 + b_\nu x_2\} \to p(g)$$

dans le réseau $\Gamma_0^+ = p(\Gamma_0)$. En conséquence $a_\nu = a$, $b_\nu = b$ pour ν assez grand, et

$$p(g) = ax_1 + bx_2,$$

d'où

$$\{z_\nu \gamma_1^a \gamma_2^b\} \to g = z'\gamma_1^a \gamma_2^b \quad \text{avec} z' \in Z(G).$$

Mais comme $\{z_\nu\} \to z'$ est une suite dans un réseau de $\mathbf{R}^n$, on doit avoir $z_\nu = z$ pour ν assez grand. Cela montre que g appartient à Γ_0.

4. En général, si le dernier terme non nul G^s de la suite centrale descendante est strictement plus petit que le centre $Z(G)$, choisissons une décomposition en somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^s + \mathfrak{a} + \mathfrak{m}$ avec $\mathfrak{g}^s + \mathfrak{a} = Z(\mathfrak{g})$. On a alors une décomposition de G comme produit direct $G = H \times A$, où A est isomorphe au groupe abélien 1-connexe $Z(G)/G^s$, et H est nilpotent 1-connexe de même degré de nilpotence que G, mais avec $Z(H) = H^s = G^s$ comme on le vérifie aisément. De plus, $Z(G)$ est le produit direct $G^s \times A$.

On notera p_H, p_A les projections de $G = H \times A$ sur chacun des facteurs; $p_H(\Gamma), p_A(\Gamma)$ sont alors des sous-groupes denses de H et A respectivement.

Si $Z(\Gamma)$ n'est pas dense dans $Z(G)$, on a quand même une suite exacte

$$0 \to Z(H) \to H \to \mathbf{R}^2 \to 0,$$

où $p_H(\Gamma)$ est un sous-groupe dense de H. L'égalité $Z(H) = H^s$ implique la densité de $Z(p_H(\Gamma)) = G^s \cap p_H(\Gamma)$ dans $Z(H) = H^s$.

Considérons maintenant le sous-groupe dense $\Gamma^* = p_H(\Gamma) \times p_A(\Gamma)$ de G. On a

$$Z(\Gamma^*) = Z(G) \cap \Gamma^* = (G^s \times A) \cap \Gamma^* = (G^s \cap p_H(\Gamma)) \times p_A(\Gamma)$$
$$= Z(p_H(\Gamma)) \times p_A(\Gamma);$$

donc $Z(\Gamma^*)$ est dense dans $Z(G) = Z(H) \times A$.

En conséquence, il existe d'après la partie 2 un certain sous-groupe

$$\Gamma_0 = \langle z_1, z_2, \ldots, z_n, \gamma_1, \gamma_2 \rangle,$$

$n = \dim G$, de rang $= n + 2$, qui est contenu dans Γ^*. Or, $z_i \in \Gamma^*$ signifie qu'il existe des $a_i \in A$ tels que $z_i a_i \in \Gamma$. En particulier $z_i a_i \in Z(G) \cap \Gamma = Z(\Gamma)$; de même, on peut choisir les γ_i dans Γ parce que $p(\Gamma^*) = p(\Gamma)$. Donc, le sous-groupe $\Gamma_0 = \langle z_i a_i, \gamma_j \rangle$ a toujours un rang égal à $n + 2$ et il est contenu dans Γ (mais il n'est pas necessairement discret). Q.E.D.

Comme nous le verrons plus loin, la méthode utilisée dans la démonstration précédente ne s'adapte pas aux extensions centrales de $\mathbf{R}^3$. Nous allons d'abord établir un critère cohomologique pour décider si un sous-groupe dense peut contenir un réseau de G.

2. La complétion de Mal'cev

Bien que quelques unes des considérations de ce paragraphe se généralisent aisément, nous nous bornerons ici au cas où Γ est un sous-groupe dense *de type fini* d'un groupe de Lie G nilpotent 1-connexe. Il existe alors un groupe de Lie $M(\Gamma)$ nilpotent 1-connexe qui contient un réseau isomorphe à Γ [Ma]. Cette *complétion de Mal'cev* $M(\Gamma)$ est unique, à isomorphisme près, et vérifie la propriété suivante: tout morphisme de groupes $\phi: \Gamma \to N$, avec N un groupe de Lie nilpotent 1-connexe, admet une seule extension $M(\phi): M(\Gamma) \to N$ en homomorphisme de groupes de Lie.

Nous allons considérer, en particulier, l'homomorphisme $M(i): M(\Gamma) \to G$, extension de l'inclusion $i: \Gamma \subset G$. Par passage aux algèbres de Lie, on obtient un morphisme $\mathfrak{m}(i): \mathfrak{m}(\Gamma) \to \mathfrak{g}$ qui donne en cohomologie $\mathfrak{m}(i)^*: H(\mathfrak{g}) \to H(\mathfrak{m}(\Gamma))$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ étant unimodulaire, la dualité de Poincaré sur $H(\mathfrak{g})$ entraine:

LEMME 4. *Soit* $[\omega]$ *un générateur de* $H^n(\mathfrak{g}) = \mathbf{R}$, $n = \dim G$. *Alors* $[\mathfrak{m}(i)^*(\omega)]$ *est non nulle dans* $H(\mathfrak{m}(\Gamma))$ *si et seulement si* $\mathfrak{m}(i)^*$ *est injective.*

PROPOSITION 5. *Soit Γ un sous-groupe dense de type fini d'un groupe de Lie G nilpotent 1-connexe. Si $\mathfrak{m}(i)^*$ n'est pas injective alors Γ ne contient aucun réseau de G.*

Preuve. Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un réseau de G. Si $M(i_0)$: $G = M(\Gamma_0) \to M(\Gamma)$ est l'extension de l'inclusion $\Gamma_0 \subset M(\Gamma)$, alors $M(i)M(i_0) = \mathrm{id}$ par unicité, donc $\mathfrak{m}(i_0)^*\mathfrak{m}(i)^* = \mathrm{id}$ et $\mathfrak{m}(i)^*$ est injective. Q.E.D.

Nous allons considérer maintenant la suite exacte courte de cinq termes

$$0 \to H^1(\mathfrak{g}) \to H^1(\Gamma) \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} H^2(\mathfrak{g}) \to H^2(\Gamma) \tag{1}$$

associée au morphisme surjectif $\mathfrak{m}(i)$: $\mathfrak{m}(\Gamma) \to \mathfrak{g}$ d'algèbres de Lie, dont le noyau sera noté $\mathfrak{k}$. Elle provient de la suite spectrale de Hochschild-Serre, $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{g}; H^q(\mathfrak{k}))$, qui converge vers $H(\mathfrak{m}(\Gamma))$. En particulier $E_2^{0,1} = H^1(\mathfrak{k})_{\mathfrak{g}}$ est l'ensemble des invariants par l'action de $\mathfrak{g}$.

D'après Van Est [VE], $H(\mathfrak{g})$ est isomorphe à la cohomologie continue $H_\infty(G)$ du groupe de Lie nilpotent 1-connexe G. La cohomologie $H(\mathfrak{m}(\Gamma))$ de l'algèbre de Lie de la complétion de Mal'cev de Γ est précisément la cohomologie de De Rham de la nilvariété compacte $M(\Gamma)/\Gamma$ [No], c'est-à-dire la cohomologie $H(\Gamma)$ du groupe discret Γ, parce que $M(\Gamma)$ est contractile. De même $H(\mathfrak{g}) = H(G/\Gamma_0) = H(\Gamma_0)$ si Γ_0 est un réseau de G.

D'abord, $\mathfrak{m}(i)^1$: $H^1(\mathfrak{g}) \to H^1(\Gamma)$ correspond à $H_\infty^1(G) \to H^1(\Gamma)$, qui associe à chaque morphisme $G \to \mathbf{R}$ de groupes de Lie sa restriction à Γ; il est injectif à cause de la densité de Γ. Par contre, la non injectivité de $\mathfrak{m}(i)^2$: $H^2(\mathfrak{g}) \to H^2(\Gamma)$ sera équivalente à l'existence d'extensions non triviales, en groupes de Lie, de G par $\mathbf{R}$, dont la restriction à Γ donne l'extension triviale $\Gamma \times \mathbf{R}$.

Notons $K = \operatorname{Ker} M(i)$ le groupe de Lie simplement connexe dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{k}$. Alors $H^1(\mathfrak{k})$ est le dual de $\mathfrak{k}/[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$ et correspond aux morphismes ϕ: $\mathfrak{k} \to \mathbf{R}$ d'algèbres de Lie, ou de façon équivalente aux morphismes de groupes de Lie Φ: $K \to \mathbf{R}$ avec $d\Phi = \phi$.

LEMME 6. *Si $\phi \in E_2^{0,1} = H^1(\mathfrak{k})_{\mathfrak{g}}$ alors* $\operatorname{Ker}\phi$ *est un idéal de* $\mathfrak{m}(\Gamma)$.

Preuve. L'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{k}$ est donnée par $X^*Y = [X^*, Y]$, où $\mathfrak{m}(i)(X^*) = X$; ainsi un morphisme ϕ: $\mathfrak{k} \to \mathbf{R}$ d'algèbres de Lie est invariant si et seulement si $\phi[X^*, Y] = 0$, $X^* \in \mathfrak{m}(\Gamma)$, $Y \in \mathfrak{k}$, c'est-à-dire $[\mathfrak{m}(\Gamma), \mathfrak{k}] \subset \operatorname{Ker}\phi$. Q.E.D.

Par exemple, $H^1(\Gamma) \to E_2^{0,1}$ fait correspondre à chaque homomorphisme de groupes discrets f: $\Gamma \to \mathbf{R}$ la restriction à K de $M(f)$: $M(\Gamma) \to \mathbf{R}$. Remarquons que si f provient d'un morphisme $G \to \mathbf{R}$, alors $M(f) = f \circ M(i)$, donc $M(f)(K) = 0$.

Etudions maintenant d_2: $E_2^{0,1} \to H^2(\mathfrak{g})$. Soit $\phi \in E_2^{0,1}$; si $\phi \neq 0$ alors ϕ est surjectif, $\mathfrak{k}/\mathrm{Ker}\,\phi = \mathbf{R}$, et $d_2(\phi) \in H^2(\mathfrak{g})$ est la classe qui représente l'extension

$$0 \to \mathbf{R} \to \mathfrak{m}(\Gamma)/\mathrm{Ker}\,\phi \to \mathfrak{g} \to 0.$$

De façon explicite, $d_2(\phi)$ est représentée par le cocycle $d_2\phi(X,Y) = \phi[X^*,Y^*]_{\mathrm{hor}}$ où hor note la partie horizontale pour une décomposition quelconque $\mathfrak{m}(\Gamma) = \mathfrak{k} \oplus W$ en espaces vectoriels, et X^*, Y^* se projettent par $\mathfrak{m}(i)$ sur X, Y respectivement.

En termes de groupes de Lie, on aura l'extension

$$0 \to \mathbf{R} \to M(\Gamma)/\mathrm{Ker}\,\Phi \to G \to 1, \quad d\Phi = \phi,$$

le Lemme précédent montrant que Ker Φ est un sous-groupe de Lie *normal* dans $M(\Gamma)$. Remarquons que si Φ est la restriction à K de $M(f)$, $f\colon \Gamma \to \mathbf{R}$, alors

$$[X^*] \to (\mathfrak{m}(i)(X^*), \mathfrak{m}(f)(X^*))$$

définit un isomorphisme entre $\mathfrak{m}(\Gamma)/\mathrm{Ker}\,\phi$ et l'extension triviale $\mathfrak{g} \times \mathbf{R}$.

PROPOSITION 7. *Soit*

$$\mathrm{ext}\colon 0 \to \mathbf{R} \to N \xrightarrow{\Delta} G \to 1$$

une extension, élément de $H^2_\infty(G) = H^2(\mathfrak{g})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(*a*) ext $\in$ Im d_2;

(*b*) *N contient* Γ *comme sous-groupe, et la restriction de* Δ *à* Γ *est* id_Γ;

(*c*) $M(i)$: $M(\Gamma) \to G$ *se factorise par* Δ.

Preuve. L'équivalence de (b) et (c) est immédiate à partir de la propriété universelle de la complétion de Mal'cev.

D'autre part, toute extension $d_2\Phi = M(\Gamma)/\mathrm{Ker}\,\Phi$ se factorise parce que Ker $\Phi \subset K = \mathrm{Ker}\,M(i)$, donc (a) $\Rightarrow$ (c).

Il reste à montrer (c) $\Rightarrow$ (a). Or, si l'on a $h\colon M(\Gamma) \to N$ avec $M(i) = \Delta \circ h$, alors la restriction de h à K donne $\Phi\colon K \to \mathbf{R}$, dont le noyau est Ker h. L'isomorphisme $M(\Gamma)/\mathrm{Ker}\,h = G$ montre que l'extension donnée est $d_2\Phi$.

Q.E.D.

L'exactitude de la suite (1) implique alors:

COROLLAIRE. $\mathfrak{m}(i)^2$: $H^2(\mathfrak{g}) \to H^2(\mathfrak{m}(\Gamma))$ *est injectif si et seulement si toute extension vérifiant les hypothèses de la Proposition 7 est triviale.*

Remarque. On peut généraliser le critère cohomologique de la Proposition 5 au cas non nilpotent en considérant un sous-groupe compact maximale K de G, de façon que G/K est contractile. D'après Van Est on aura $H_\infty(G) = H(\mathfrak{g}, K)$, la cohomologie du complexe des formes $\omega \in \Lambda\mathfrak{g}^*$ telles que $i_X\omega = 0$, $L_X\omega = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{k}$, l'algèbre de Lie de K.

L'inclusion $\Gamma \subset G$ induit un morphisme $H(G^\delta) \to H(\Gamma)$ entre leurs cohomologies comme groupes *discrets* (à coefficients dans $\mathbf{R}$). L'inclusion des cochaînes continues dans le complexe de toutes les cochaînes induit une flèche $H_\infty(G) \to H(G^\delta)$. On obtient alors par composition un morphisme $k^*: H(\mathfrak{g}, K) \to H(\Gamma)$ [BW].

Pour expliciter k^* au niveau des complexes de cochaînes on définit

$$k(\omega)(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \int_{\Delta(\gamma_1, \dots, \gamma_n)} \omega$$

où $\Delta(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ est un certain n-simplexe singulier sur G/K qu'on associe, à l'aide d'une contraction, à chaque $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \Gamma^n$; à ce sujet, une discussion détaillée apparaît dans [Du]. Lorsque G est nilpotent 1-connexe et Γ de type fini, on vérifie aisément que $k^* = \mathfrak{m}(i)^*$ si l'on prend $F(\exp(x), t) = \exp(tx)$ comme contraction dans $M(\Gamma)$ et G.

3. L'exemple

Soit G un groupe de Lie nilpotent 1-connexe, avec $Z(G) = [G, G]$ et de degré de nilpotence $s = 1$. Un tel groupe est alors une extension centrale de $G/Z(G) \cong \mathbf{R}^m$. Etant donnés les résultats du §1, nous allons considérer maintenant le cas $m = 3$, où un argument élémentaire montre que dim $Z(G) \geq 2$.

L'exemple le plus simple est alors le groupe de Lie H_5 des matrices triangulaires à coefficients réels

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & y_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet une base $\mathfrak{g} = \langle X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2 \rangle$ avec $[X_1, X_2] = Y_1$, $[X_1, X_3] = Y_2$ et tous les autres crochets nuls.

Le groupe de Lie H_5 est rationnel, parce qu'il contient le réseau $H_5 \cap \mathrm{SL}(4, \mathbf{Z})$ formé des matrices à coefficients entiers. Néanmoins, nous allons construire un sous-groupe dense et de type fini Γ de H_5, qui ne peut contenir aucun réseau de H_5. Au lieu de décrire Γ directement, nous profiterons des résultats précédents pour en simplifier la définition.

Proposition 8. *Pour $G = H_5$ il existe*:
—*Un groupe de Lie N, nilpotent 1-connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$*;
—*un sous-groupe de type fini Γ de N*;
—*et un morphisme surjectif de groupes de Lie $\Delta: N \to G$, tels que*:
(a) $\Gamma \cap \operatorname{Ker} \Delta = 1$, *et Γ est dense dans N, et*
(b) *le morphisme $\Delta^*: H(\mathfrak{g}) \to H(\mathfrak{n})$ induit en cohomologie n'est pas injectif.*

Corollaire. *Le sous-groupe dense de type fini $\Delta(\Gamma) \cong \Gamma$ du groupe de Lie $G = H_5$ ne contient aucun réseau de G.*

Preuve du Corollaire. On utilisera la Proposition 5. Considérons la complétion de Mal'cev $M(\Gamma)$ de $\Gamma \cong \Delta(\Gamma)$; l'unicité du morphisme induit par les inclusions prouve qu'il y a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M(\Gamma) & \cong & M(\Delta(\Gamma)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \longrightarrow & G \end{array}$$

et que par conséquent $H(\mathfrak{g}) \to H(\mathfrak{m}(\Delta(\Gamma)))$ n'est pas injectif puisqu'il se factorise en $H(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\Delta^*} H(\mathfrak{n}) \to H(\mathfrak{m}(\Delta(\Gamma)))$ et Δ^* n'est pas injectif.

La densité de $\Delta(\Gamma)$ dans G découle de celle de Γ dans N et de la surjectivité de Δ. Q.E.D.

Remarque. En fait, d'après la Proposition 7 nous savons que l'existence de N est une obstruction à l'injectivitié de $\mathfrak{m}(i)^*$.

Preuve de la Proposition 8. Soit $N \subset SL(6, \mathbf{R})$ le groupe nilpotent 1-connexe de dimension 6 formé des matrices à coefficients réels

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 & 0 & v_1 & v_2 \\ & 1 & 0 & 0 & u_2 & u_3 \\ & & 1 & u_2 & 0 & v_3 \\ & & & 1 & 0 & u_3 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{n} = \langle U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3 \rangle$ avec $[U_1, U_2] = V_1$, $[U_1, U_3] = V_2$, $[U_2, U_3] = V_3$.

Fixons une fois pour toutes un nombre réel *transcendant* α, et notons

$$\langle 1, \alpha^{n_1}, \ldots, \alpha^{n_k} \rangle \subset \mathbf{R}$$

l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbf{Z}$ des puissances entières $1, \alpha^{n_1}, \dots, \alpha^{n_k}$. Les α^{n_i}, $n_i \neq 0$, n'étant pas rationnels, on obtient ainsi des sous-groupes *denses* de $\mathbf{R}$.

Soit $\Gamma = \Gamma_\alpha$ le sous-groupe de N formé des matrices dont les coefficients vérifient

$$\begin{aligned} &u_1 \in \langle 1, \alpha^5 \rangle \quad && v_1 \in \langle 1, \alpha^2, \alpha^5, \alpha^7 \rangle \\ &u_2 \in \langle 1, \alpha^2 \rangle \quad && v_2 \in \langle 1, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^8 \rangle \\ &u_3 \in \langle 1, \alpha^3 \rangle \quad && v_3 \in \langle 1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^5 \rangle. \end{aligned}$$

Définissons enfin l'homomorphisme $\Delta = \Delta_\alpha$ par les relations

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + \alpha u_3 \\ x_2 &= u_2 + \alpha u_3 \\ x_3 &= u_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= v_1 + \alpha v_2 - \alpha v_3 + \alpha u_3\left(u_2 + \tfrac{1}{2}\alpha u_3\right) \\ y_2 &= v_2 + \tfrac{1}{2}\alpha u_3 u_3. \end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur les vérifications correspondantes, la condition $\Gamma \cap \operatorname{Ker} \Delta = 1$ étant assurée par le caractère non algébrique de α. Il est aussi facile de trouver un systéme fini de générateurs pour Γ, dont le rang est 18.

Pour finir, nous montrons que Δ^* n'est pas injectif.

L'algèbre de Lie de N est formée des matrices $A - \mathrm{Id}$, $A \in N$, c'est-à-dire zéros sur la diagonale, et $\exp\colon \mathfrak{n} \to N$ est définie par $\exp(A) = \mathrm{Id} + A + A^2/2$. Des considérations analogues sont valables pour G. On en déduit que le morphisme $d\Delta\colon \mathfrak{n} \to \mathfrak{g}$ associé à Δ est donné par:

$$\begin{aligned} d\Delta(U_1) &= X_1 \\ d\Delta(U_2) &= X_2 \\ d\Delta(U_3) &= X_3 + \alpha(X_1 + X_2) \\ d\Delta(V_1) &= Y_1 \\ d\Delta(V_2) &= Y_2 + \alpha Y_1 \\ d\Delta(V_3) &= -\alpha Y_1. \end{aligned}$$

Considérons les duales $\mathfrak{g}^* = \langle x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \rangle$ et $\mathfrak{n}^* = \langle u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \rangle$. L'image par Δ^* du générateur de $H^5(\mathfrak{g})$ est alors

$$\begin{aligned} &\Delta^*(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge y_1 \wedge y_2) \\ &\quad = u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge v_1 \wedge v_2 + \alpha u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge v_2 \wedge v_3 \\ &\quad = -d(u_1 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) - \alpha d(u_3 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \end{aligned}$$

qui représente la classe nulle dans $H^5(\mathfrak{n})$. Q.E.D.

Références

[BW] A. Borel et N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Ann. of Math. Studies, no. 94, Princeton University Press, 1980.

[Du] J.L. Dupont, *Curvature and characteristic classes*, Lecture Notes in Math., no. 640, Springer-Verlag, New York, 1978.

[Ma] A.I. Mal'cev, *On a class of homogeneous spaces*, Transl. Amer. Math. Soc., vol. 39 (1951), pp. 276–307.

[Mo] P. Molino, *Riemannian foliations*, Progress in Math., vol. 73, Birkhäuser, 1988.

[No] K. Nomizu, *On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups*, Ann. of Math., vol. 59 (1954), pp. 531–538.

[Ra] M.S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Ergebnisse der Math., vol. 68, Springer-Verlag, New York, 1972.

[Sch] J. Scheuneman, *Two-step nilpotent Lie algebras*, J. Algebra, vol. 7 (1967), pp. 152–159.

[VE] W.T. Van Est, *A generalization of the Cartan-Leray spectral sequence*, Proc. Kon. Neder. Akad. Ser. A, vol. 61 (1958), pp. 399–413.

Universidade de Santiago.
Santiago de Compostela, Espagne