AUTOMORPHISMEN VON GRUPPEN UND ENDOISOMORPHISMEN FREIER GRUPPEN

G. A. Miller zum Gedächtnis

VON

OTTO GRÜN

Man kann bekanntlich jede endlich erzeugbare Gruppe $\mathfrak{G}$ als Faktorgruppe einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$ darstellen. Wird $\mathfrak{G}$ von den unabhängigen Elementen $s_1, s_2, \cdots, s_\alpha$ erzeugt, so kann man in der freien Gruppe $\mathfrak{F} = \{t_1, \cdots, t_\alpha\}$ vom Rang α einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ so bestimmen, daß $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ mit der Zuordnung $t_i \mathfrak{N} \rightarrow s_i$, $i = 1, \cdots, \alpha$ isomorph mit $\mathfrak{G}$ ist. Ist $R_1(s_1, \cdots, s_\alpha) = 1, \cdots, R_n(s_1, \cdots, s_\alpha) = 1$ ein System unabhängiger 1-Relationen von $\mathfrak{G}$, so erzeugen die Elemente $R_1(t_1, \cdots, t_\alpha), \cdots, R_n(t_1, \cdots, t_\alpha)$ mit all ihren in $\mathfrak{F}$ Konjugierten zusammen gerade den obigen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{F}$. Jeder Automorphismus von $\mathfrak{F}$, der $\mathfrak{N}$ invariant läßt, induziert einen Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Aber nicht immer läßt sich jeder Automorphismus von $\mathfrak{G}$ auf diese Art aus einem Automorphismus von $\mathfrak{F}$ herleiten. Z.B. wenn $\mathfrak{G}$ eine zyklische Gruppe $\{s\}$ von der endlichen Ordnung m ist, so ist jede Zuordnung $s \rightarrow s^k$, $(k, m) = 1$ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Aber $\mathfrak{G} = \{t\}/\{t^m\}$ und es gibt keinen Automorphismus der freien zyklischen Gruppe $\{t\}$, der $t\{t^m\}$ auf $t^k\{t^m\}$ abbildet, wenn $k \neq \pm 1$ ist. Hier soll nun gezeigt werden: Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ so gibt es zu jedem Automorphismus ϑ von G einen Endoisomorphismus σ von $\mathfrak{F}$ mit den Eigenschaften: Ist $s_i \rightarrow t_i \mathfrak{N}$ so $s_i^\vartheta = t_i^\sigma \mathfrak{N}$, die Zuordnung $s_i \rightarrow t_i^\sigma \mathfrak{N}$ ergibt den Automorphismus $s_i \rightarrow s_i^\vartheta$ von $\mathfrak{G}$. Z.B. in der obigen zyklischen Gruppe $\{s\}$ von der Ordnung m kann der Automorphismus ϑ, $s^\vartheta = s^k$ durch den Endoisomorphismus σ der zyklischen freien Gruppe $\{t\}$ induziert werden: $t^\sigma = t^k$, $\{t^k\} \subset \{t\}$, $\{t^m\}^\sigma = \{t^{km}\} \subset \{t^m\}$, $\{t^\sigma\}\{t^m\} = \{t\}$ da $(k, m) = 1$ ist, also $\{s\} = \{t\}/\{t^m\} = \{t^\sigma\}\{t^m\}/\{t^m\} \cong \{t^\sigma\}/\{t^\sigma\} \cap \{t^m\} = \{t^k\}/\{t^{km}\}$, und die Zuordnung $t^\sigma\{t^m\} = t^k\{t^m\} \rightarrow t\{t^m\}$ definiert einen Automorphismus von $\{t\}/\{t^m\} = \{s\}$. Dies läßt sich allgemein für jede Gruppe $\mathfrak{G}$ durchführen, die als Faktorgruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ einer freien Gruppe dargestellt ist wenn $\mathfrak{G}$ endlich erzeugbar und nicht isomorph mit einer echten Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Die letztgenannten Voraussetzungen sollen im Folgenden durchweg gelten.

I. Es sei $\mathfrak{F} = \{t_1, \cdots, t_\alpha\}$ die t_μ freie Erzeugende von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$. Es bedeutet offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir voraussetzen, daß die $t_\mu \mathfrak{N}$, $\mu = 1, \cdots, \alpha$, ein System von unabhängigen Erzeugenden von $\mathfrak{G}$ bilden. Die Gruppe aller Automorphismen ϑ von $\mathfrak{F}$, die $\mathfrak{N}$ invariant lassen, induziert offenbar eine Gruppe von

Received January 9, 1959.